Editor : Zulfa Razi, S.Pd., M.Si.

YAYASAN PENERBIT MUHAMMAD ZAINI

TEORI DAN APLIKASI

KALKULUS DASAR

Irmayanti, S.Pd., M.Pd. - Natalia Rosalina Rawa, M.Pd. - Andi Ulmi Asnita, S.Pd., M.Pd.
Munaji, M.Pd. - Dinar Riaddin, M.Pd. - Fitriani, M.Pd. - Junaedi, S.Pd.,M.Pd.
Bernadus Bin Frans Resi, M.Pd. - Dr. Jan Setiawan, S.Si., M.Si. - Taufiqulloh Dahlan, M.Pd.

TEORI DAN APLIKASI KALKULUS DASAR

Irmayanti, S.Pd., M.Pd
Kiki Henra, S.Pd., M.Pd
Andi Ulmi Asnita, S.Pd., M.Pd
Munaji, M.Pd
Dinar Riaddin, M.Pd
Fitriani, S.Pd., M.Pd
Junaedi, S.Pd., M.Pd
Bernadus Bin Frans Resi, M.Pd
Dr. Jan Setiawan, S.Si., M.Si
Taufiqulloh Dahlan, M.Pd

Editor:

Zulfa Razi, S.Pd., M.Si.

YAYASAN PENERBIT MUHAMMAD ZAINI

TEORI DAN APLIKASI KALKULUS DASAR

Penulis:
Irmayanti, S.Pd., M.Pd; Kiki Henra, S.Pd., M.Pd, M.Pd; Andi Ulmi Asnita, S.Pd., M.Pd; Munaji, M.Pd; Dinar Riaddin, M.Pd; Fitriani, M.Pd; Junaedi, S.Pd.,M.Pd; Bernadus Bin Frans Resi, M.Pd; Dr. Jan Setiawan; Taufiqulloh Dahlan, M.Pd.

ISBN: 978-623-97420-8-9

Editor:
Zulfa Razi, S.Pd., M.Si.

Penyunting:
Nanda Saputra, M.Pd.

Desain Sampul dan Tata Letak
Atika Kumala Dewi

Penerbit:
Yayasan Penerbit Muhammad Zaini

Redaksi:
Jalan Kompleks Pelajar Tijue
Desa Baroh Kec. Pidie
Kab. Pidie Provinsi Aceh
No. Hp: 085277711539
Email: penerbitzaini101@gmail.com
Website: penerbitzaini.com

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji dan syukur saya panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan buku Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar ini. Buku referensi ini merupakan buku kolaborasi yang dituliskan oleh beberapa dosen yang bergabung dalam Asosiasi Dosen Kolaborasi Lintas Perguruan Tinggi.

Adapun *bookchapter* ini tidak akan selesai tanpa bantuan, diskusi dan dorongan serta motivasi dari beberapa pihak, walaupun tidak dapat disebutkan satu persatu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebanyak-banyaknya.

Ahirnya, penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Dengan demikian, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan serta perkembangan lebih lanjut pada *bookchapter* ini.

Wassalamu'alaikumsalam, Wr.Wb.

Sigli, 22 Juni 2021

Tim Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
KONSEP DASAR KALKULUS

A. Pengertian Kalkulus

Kalkulus merupakan salah satu topik bahasan dalam matematika. Kalkulus adalah cabang matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret tak hingga (Rejeki, 2017). Limit merupakan suatu fungsi sangat penting untuk mempelajari kalkulus. Konsep tersebut digunakan dalam menjelaskan beberapa konsep terpenting dalam kalkulus yaitu kontinuitas, turunan fungsi dan integral tertentu dari suatu fungsi (V.Zandy & J.White, n.d.). Salah satu penerapan yang terpenting dari limit adalah konsep turunan atau deferensial sebuah fungsi. Sebuah fungsi terdeferensialkan jika limit ada (Varberg et al., 2004). Selain deferensial, operasi kalkulus penting yang kedua adalah antideferensial atau pengintegralan. Deferensial dan integralan merupakan operasi yang dianggap sebagai inversi satu sama lain, Integral adalah balikan dari deferensiasi (V.Zandy & J.White, n.d.)

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (2015), kalkulus adalah bagian matematika yang melibatkan pengertian dan penggunaan deferensial dan integral fungsi serta konsep yang berkaitan (KBBI, 2020).

Kalkulus adalah studi tentang perubahan, seperti geometri mengkaji tentang bentuk dan aljabar mengkaji tentang operasi dan aplikasinya dalam menyelesaikan persamaan. Kalkulus memiliki berbagai aplikasi di bidang sains, ekonomi, dan teknik. Selain itu, kalkulus juga dapat memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat diselesaikan oleh aljabar dasar (LaTorre et al., 2007).

B. Prinsip- Prinsip Dasar Kalkulus

Prinsip kalkulus adalah selalu dapat menggunakan perkiraan yang lebih akurat untuk mendapatkan jawaban yang lebih akurat. Misalnya, Anda dapat membagi kurva dengan serangkaian garis lurus. Semakin pendek garis lurusnya, semakin dekat kelompok garis tersebut ke kurva. Selain itu, Anda juga dapat menggunakan serangkaian kubus untuk memperkirakan volume benda bulat, dan Anda dapat menyesuaikan kubus yang lebih kecil di setiap iterasi. Dengan menggunakan kalkulus, Anda dapat menentukan hasil akhir perkiraan yang cenderung akurat, yang disebut batas.

Teorema dasar kalkulus menyatakan bahwa turunan dan integral adalah dua operasi yang berlawanan. Lebih tepatnya, teorema menghubungkan nilai anti-turunan dengan integral tertentu. Karena menghitung anti-turunan lebih mudah daripada menerapkan definisi integral tertentu, teorema dasar kalkulus menyediakan cara praktis untuk menghitung integral tertentu (LaTorre et al., 2007).

Teorema dasar kalkulus menyatakan:

Jika sebuah fungsi f adalah kontinu pada interval$[a, b]$ dan jika F adalah fungsi yang mana turunannya adalah f pada interval (a,b), maka:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - (a)$$

Untuk menghitung nilai integral, kita dapat menggunakan teorema dasar kalkulus tanpa menggunakan definisi integral tertentu sebagai batas penjumlahan Riemann. Selain itu, Teorema dasar Kalkulus ini dapat digunakan untuk menentukan luas dan volume sebuah bangun.

C. Bentuk-Bentuk Kalkulus

Pada umumnya kalkulus dibagi menjadi dua yaitu Kalkulus I dan Kalkulus II. Kalkulus I disebut kalkulus deferensial yang meliputi limit, deferensial dan aplikasi deferensial. Kalkulus diferensial adalah studi tentang laju perubahan fungsi dan variabel ketika mereka berubah.

Kalkulus diferensial menjelaskan metode laju perubahan fungsi yang disebut turunan. Turunan dalam kalkulus adalah ukuran perubahan fungsi dengan perubahan nilai input. Secara umum, turunan menggambarkan perubahan fungsi karena perubahan variabel; misalnya, turunan posisi suatu benda dalam gerakan relatif terhadap waktu adalah kecepatan sesaat benda tersebut. Fungsi akan menggambarkan sistem yang terus berubah, seperti perubahan suhu harian atau kecepatan planet di sekitar bintang. Turunan dari fungsi ini akan memberikan gambaran tingkat perubahan suhu dan percepatan planet. Proses mencari turunan disebut diferensiasi.

Sedangkan Kalkulus II disebut Kalkulus Integral yang meliputi integral tentu, integral tak tentu dan penggunaan integral tentu. Secara sederhana, integral dapat didefinisikan sebagai kebalikan (invers) dari sebuah fungsi turunan. Ada pula yang mengartikan integral sebagai suatu bentuk penjumlahan yang bersifat kontinu (berkelanjutan) yang juga merupakan bentuk anti turunan.

Integral sendiri dapat dikategorikan menjadi 2 jenis, yaitu :

1. Integral Tak Tentu, merupakan bentuk kebalikan dari fungsi turunan.
2. Integral Tentu, yaitu limit dari luas suatu daerah tertentu.

Dengan memahami laju perubahan (fungsi) sistem, Anda dapat menemukan nilai yang mewakili masukan sistem. Dengan kata lain, jika Anda mengetahui turunan (turunan) seperti percepatan, Anda dapat menggunakan integral untuk mencari fungsi aslinya, yaitu kecepatan. Selain itu, kalkulus integral merupakan suatu bentuk matematika yangapat mengidentifikasi volume, luas, dan solusi persamaan.

Dua cabang utama kalkulus, kalkulus diferensial dan kalkulus integral sangat terkait satu sama lain melalui teorema dasar kalkulus. Deferensial dan Integral merupakan operasi dasar dalam kalkulus. Contoh cabang kalkulus lainnya adalah kalkulus proposisional, kalkulus variasi, kalkulus lambda, dan kalkulus proses. Mata kuliah kalkulus adalah pintu gerbang ke mata kuliah matematika tingkat lanjut lainnya yang berspesialisasi dalam fungsi dan batasan. Fungsi dan batasan ini sering disebut sebagai analisis matematika (LaTorre et al., 2007).

D. Pengembangan Kalkulus

Seiring perkembangan ilmu dan teknologi, kalkulus tidak hanya digunakan dalam bidang matematika tetapi Kalkulus juga dapat digunakan di setiap cabang ilmu fisika, ilmu komputer, statistik, teknik, ekonomi, bisnis, kedokteran, demografi, dan banyak bidang lainnya. Setiap konsep dalam mekanika klasik terkait satu sama lain melalui kalkulus. Massa benda yang tidak diketahui massa jenisnya, momen inersia benda, dan energi total benda dapat ditentukan dengan menggunakan kalkulus (LaTorre et al., 2007).

Dalam sub disiplin kelistrikan dan magnet, kalkulus dapat digunakan untuk mencari fluks total (fluks) dari medan elektromagnetik. Contoh sejarah lainnya adalah penggunaan kalkulus dalam hukum gerak Newton, yang dinyatakan dengan laju perubahan turunannya: laju perubahan momentum suatu benda sama dengan gaya resultan yang bekerja pada benda dalam arah yang sama (LaTorre et al., 2007).

Bahkan rumus umum hukum kedua Newton yang menyatakan bahwa gaya merupakan massa kali percepatan menggunakan rumus diferensial, karena percepatan dapat dinyatakan sebagai turunan kecepatan. Teori elektromagnetik Maxwell dan teori relativitas Einstein juga diungkapkan oleh kalkulus. Kalkulus memiliki beragam penerapan dalam kehidupan sehari-hari. Matematika sebagai salah satu induk ilmu pengetahuan sangat dibutuhkan dalam bidang lain. Beberapa penerapan kalkulus dalam bidang lain antara lain:

1. Pada bidang fisika, khusunya terkait mekanika, kalkulus sangat diperlukan untuk menyelesaikan perhitungan-perhitungan dengan menerapkan konsep kalkulus.
2. Dalam bidang statistika dan teori peluang juga terdapat perhitungan dengan menerapkan konsep kalkulus (integral).
3. Dalam bidang ekonomi, kalkulus dapat digunakan untuk menentukan biaya marginal (kalkulus diferensial).

BAB II
BILANGAN REAL

A. Sistem Bilangan Real

Belajar matematika merupakan suatu aktivitas melakukan usaha penalaran angka-angka atau bilangan. Banyak keilmuan yang berkembang dari sebuah konsep matematika, salah satunya adalah ilmu komputer berkembang dari konsep sistem bilangan.

Sistem bilangan merupakan salah satu penemuan yang sangat penting sepanjang sejarah beradaban manusia. Berkat penemuan sistem bilangan inilah sehingga sampai detik ini kita mampu menentukan serta menyebutkan kuantitas atau jumlah tertentu dari obyek, baik dari yang terdiri dari satu obyek atau bahkan lebih.

Pada perkembangan selanjutnya, sistem bilangan juga memainkan peran penting pada perkembangan teknologi dan kesehatan. Hal ini terbukti dengan penggunaan sistem bilangan biner diberbagai jenis mesin berteknologi, termasuk sistem komputer yang saat ini menggerakkan berbagai bidang kehidupan manusia khususnya di era industri 4.0 dan social 5.0 pengembangan sistem *artificial intelligence* tidak terlepas dari peran utama sistem bilangan.

Tanpa adanya sistem bilangan mustahil bagi manusia melakukan pengembangan ilmu pengetahuan dan bahkan akan sangat berdampak pada kelangsungan hidup umat manusia sebab klasifikasi dan kuantitas suatu obyek menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari kehidupan kita.

Maka dari itu konsep dasar dari sistem bilangan itu sendiri harus dipahami lebih jauh sebelum mendalami materi matematika yang lebih kompleks

Untuk memudahkan kita dalam memahami konsep sistem bilangan real, berikut diberikan beberapa himpunan bilangan sebagai berikut:

1. Himpunan Bilangan Asli *(Natural)*

Himpunan bilangan asli dinotasikan dengan N dan anggota-anggota bilangan asli adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... sehingga $N=\{1,2,3,4,5,6,...\}$ Bilangan asli tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, artinya untuk setiap a, b bilangan asli maka (a+b) dan (a.b) bilangan asli. Oleh karena itu, himpunan semua bilangan asli membentuk suatu sistem sistem bilangan asli.

2. Himpunan bilangan Cacah *(Whole)*

Bilangan cacah dilambangkan dengan *W* dan anggota-anggota bilangan cacah adalah 0,1,2,3,4,5,6, ..., sehingga *W*={0,1,2,3,4,5,6,...}. Bilangan cacah tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, artinya untuk setiap a, b bilangan cacah maka (a+b) dan (a.b) bilangan cacah.

3. Himpunan bilangan Bulat

Sistem bilangan asli bersama-sama dengan bilangan nol dan lawan dari bilangan-bilangan asli membentuk sistem bilangan bulat. Bilangan bulat dinotasikan dengan *Z* yang anggota-anggotanya adalah ...-3, -2, -,1, 0, 1, 2, 3, ..., sehingga *Z*= {... −3,−2,−2,0,1,2,3,...}.

4. Himpunan bilangan Rasional

Bilangan pecahan atau bilangan rasional (quotient). Bilangan rasional adalah *a b* bilangan yang bentuk umumnya dinyatakan dengan $Q = \{x | \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\}$ merupakan bilangan yang dapat dinyatakan sebagai hasil bagi antara dua buah bilangan bulat (pecahan) dengan syarat bahwa nilai penyebutnya tidak sama dengan nol, misalnya: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{8}$ dan lain sebagainya.

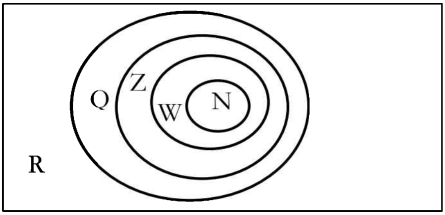
5. Himpunan bilangan Irrasional

Bilangan ini disebut juga bilangan tak terukur ditulis $Q' = \{x | x \in Q\}$ yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi antara dua bilangan bulat (pecahan), tapi dapat dinyatakan dengan bilangan desimal tak tentu atau tak berulang, seperti e = 2,71828…, µ = 3,14159…, $\sqrt{2} = 1{,}4142$ ..., dan lain sebagainya.

6. Himpunan bilangan Real (nyata)

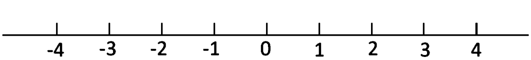
Himpunan bilangan ini dinotasikan sebagai $R = \{x | x \in R\}$, dalam hal ini bilangan rasional dan irrasional merupakan himpunan

bilangan real sehingga dapat disimpulkan himpunan bilangan Asli N merupakan subset dari himpunan bilangan Cacah W. Himpunan bilangan Cacah W merupakan subset dari himpunan bilangan Rasional Q, sedangkan himpunan bilangan tidak real merupakan himpunan bilangan imaginer atau biasa disebut juga dengan himpunan bilangan kompleks.
Gabungan himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional disebut himpunan bilangan ***real*** yang diberi simbol dengan huruf R. Dengan diagram Venn himpunan bilangan real, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan bulat, dan himpunan bilangan asli di gambarkan sebagai berikut.



Gambar. 2.1. Diagram Venn Relasi Antar Himpunan Bilangan

Himpunan sistem bilangan tersebut dapat dituliskan dalam subset sebagai berikut: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$.
Terdapat korespondensi satu-satu antara bilangan real dengan titik pada garis bilangan. Artinya, untuk setiap bilangan real yang disebut dapat ditunjuk sebuah titik pada garis bilangan yang mewakilinya. Sebaliknya, untuk setiap titik yang ditunjuk pada garis bilangan dapat disebut bilangan real yang diwakilinya.



Gambar. 2.2. Garis Bilangan

B. Operasi Bilangan

Operasi hitung bilangan pada dasarnya dibedakan menjadi 4 jenis operasi hitung dasar. Dari keempat operasi hitung dasar bilangan tersebut disebut operasi aritmatika. Terdapat juga 3 operasi hitung lain yang sering digunakan yaitu *perpangkatan*, *akar*, dan *tanda kurung*. Berikut digunakan bilangan bulat sebagai contoh dari operasi hitung tersebut. Jika a, b, dan c adalah bilangan real, maka:

1. Operasi Bilangan Bulat

a. Penjumlahan

1) $a + b = b + a$ (komutatif)

Contoh:

$3 + 4 = 4 + 3 = 7$

$2p + 3q = 3q + 2p$

2) $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$ (asosiatif)

Contoh:

$2 + 3 + 6 = 2 + (3 + 6) = (2 + 3) + 6 = 11$

$3x + 4y + 7z = 3x + (4y + 7z) = (3x + 4y) + 7z$

b. Pengurangan

Pada sifat operasi pengruangan dan perluasannya digunakan aturan sebagai berikut:

$a - b - c = a - (b + c)$

$a - b + c = a - (b - c)$

$-a - b - c = a - (b - c)$

Contoh:

Sederhanakanlah: $4(2a - 5b + c) - 2(3b + 2c) + 8a$

Penyelesaian: $4(2a - 5b + c) - 2(3b + 2c) + 8a$

$= 8a - 20b + 4c - 6b - 4c + 8a$

$= 8a + 8a - 20b - 6b + 4c - 4c$

$= 16a - 26b$

c. Perkalian

1) $a . b = b . a$ (komutatif)

Contoh:

$3 . 4 = 4 . 3 = 12$

$2p . 3q = 3q . 2p = 6pq$

2) a . b . c = a . (b . c) = (a . b) . c (asosiatif)
Contoh:
2 . 3 . 6 = 2 (3 . 6) = (2 . 3) 6 = 36
3x . 4y . 7z = 3x . (4y . 7z) = (3x . 4y) . 7z

3) a . (b . c) = a.b + a.c (Distributif)
Contoh:
5. (7 . 9) = 5 . 7 + 5 . 9 = 80
2x (3y + 6z) = 6xy + 12xz

Berikut ini beberapa sifat perkalian penting untuk diketahui:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Catatan Penting; a . $\frac{1}{a}$ = 1, sehingga $\frac{1}{a}$ disebut sebgai invers perkalian dari a sedangkan 1 disebut unsur identitas.

d. Pembagian
Sifat operasi pembagian:

1) a (b : c) = (a.b) : c atau ab = $\frac{ab}{c}$

Contoh: $2 \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{3}$

2) $\frac{ab}{pq} = \frac{a}{p} \times \frac{b}{q}$

Contoh: $\frac{4 \times 2}{3 \times 5} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$

3) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$

Contoh: $\frac{6}{\frac{4}{5}} = \frac{6 \times 5}{4}$

4) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{bc}$

Contoh: $\frac{6}{\frac{4}{5}} = \frac{6}{4\times5}$

5) $\frac{a}{b} = \frac{pa}{pb}$

Contoh: $\frac{4}{3} = \frac{2\times4}{2\times3}$

6) $\frac{a+b}{p} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p}$

Contoh: $\frac{4+2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$

2. Operasi Bilangan Pecahan

a. Penjumlahan

1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ (Komutatif)

Contoh: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+6}{24} = \frac{10}{24}$

2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c}$ (Asosiatif)

Contoh:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\frac{6+4+3}{12} = \frac{6+(4+3)}{12} = \frac{(6+4)+3}{12}$$

$$\frac{13}{12} = \frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$

b. Pengurangan

Contoh:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

c. Perkalian

1) $\frac{1}{a}.\frac{1}{b}=\frac{1}{b}.\frac{1}{a}$ (Komutatif)

Contoh: $\frac{3}{5}.\frac{4}{6}=\frac{4}{6}.\frac{3}{5}=\frac{12}{30}$

2) $\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}.\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}.\frac{1}{b}\right).\frac{1}{c}$ (Asosiatif)

Contoh:

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right).\frac{1}{4}$$

d. Pembagian

Contoh: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\frac{3}{1}=\frac{3}{2}$

3. Operasi Bilangan Berpangkat

Agar pengertian konsep operasi pada bilangan berpangkat dapat dipahami dengan baik perhatikan pernyataan berikut ini:

a^3 artinya a x a x a sebanyak 3 faktor

a^3 dibaca a berpangkat tiga

Bentuk secara umum: a^n artinya $a \times a \times a \times \ldots a$ sebanyak *n* faktor *a* disebut bilangan berpangkat *a* disebut bilangan dasar pokok 3 disebut pangkat atau eksponen Contoh:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

a. Perkalian bilangan pokok yang sama

$a^m \times a^n = a^{m+n}, a \neq 0$

Contoh: $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

b. Pembagian bilangan pokok yang sama

$a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$

Contoh: $4^6 : 4^3 = 4^{6-3} = 4^3$

c. Pemangkatan bilangan berpangkat

$(a^m)^n = a^{m.n}$

Contoh: $(3^5)^2 = 3^{5.2} = 3^{10}$

d. Pemangkatan perkalian dua bilangan atau lebih

$(a.b)^m = a^m . b^m$

Contoh: $(3.2)^4 = 3^4 \times 2^4$

e. Pemangkatan pecahan

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, a, b \neq 0$$

Contoh: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$

f. Pemangkatan Nol

$a^0 = 1, a \neq 0$

Contoh: $6^{2-2} = 6^0 = 1$

g. Pangkat Negatif

$a^m : a^n = \frac{1}{a^{m-n}}, m < n$

Contoh: $2^{3-6} = 2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$

4. Operasi Bilangan Irrasional

Bentuk akar merupakan kebalikan dari pangkat untuk menunjukkan bahwa pangkat dari bilangan tersebut dibagi oleh indeks yang terdapat pada tanda akar

Bentuk umumnya: $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$ dengan *m* adalah indeks akar. Pada penulisan akar yang tidak disertai indeks berarti indeks dari akar tersebut adalah 2 misalnya $\sqrt{5}$ yang artinya sama dengan $5^{1/2}$.

Operasi pada akar:

1) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

   Contoh: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5 \times 4} = \sqrt[3]{20}$

2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

   Contoh: $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

   Contoh: $\left(\sqrt[3]{20}\right)^3 = 20$

C. Urutan

1. Urutan Bilangan Bulat

Definisi "*kurang dari*" pada bilangan bulat dikenalkan melalui pendekatan garis bilangan dan pendekatan penjumlahan. Dengan pendekatan garis bilangan, bilangan bulat *a* kurang dari *b*, ditulis *a* < *b*, ditunjukkan dengan letak *a* di sebelah kiri *b*. Pada garis bilangan tersebut, dapat dilihat bahwa -3 < 2, -4 < -1, -2 < 3.

Dengan menggunakan pendekatan penjumlahan, bentuk *a* < *b* ditunjukkan dengan adanya bilangan positif, sedemikian hingga *a* + *p* = *b*. Dapat pula dikatakan bahwa *a* < *b* jika dan hanya jika *b* – *a* adalah bilangan positif. Dengan pendekatan penjumlahan, jelas bahwa -21 < -4 karena (-4) – (-21) = 17, merupakan bilangan positif.

Serupa dengan penjelasan di atas, pengertian "*kurang dari atau sama dengan*", "*lebih dari*", dan "*lebih dari atau sama dengan*", yang masing-masing disimbolkan dengan ≤, >, dan ≥ juga dapat dikenalkan melalui pendekatan garis bilangan dan pendekatan penjumlahan. Selanjutnya kita bahas sifat-sifat urutan bilangan bulat, ditunjukkan sebagai berikut.

Sifat urutan bilangan bulat

Misalkan *a, b,* dan *c* masing-masing merupakan bilangan bulat, *p* bilangan bulat positif, dan *n* bilangan bulat negatif.

a. Sifat transitif kurang dari;
   Jika a < b dan b < c maka a < c
b. Sifat kurang dari dan penjumlahan;
   Jika a < b maka a + c < b + c
c. Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan positif;
   Jika a < b maka ap < bp
d. Sifat kurang dari dan perkalian dengan bilangan negative;
   Jika a < b maka an > bn.

Sifat-sifat urutan tersebut tetap berlaku apabila simbol < diubah dengan ≤, >, dan ≥. Tampak bahwa ketiga sifat urutan yang pertama berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah, tetapi sifat yang keempat tidak berlaku pada semesta himpunan bilangan cacah.

2. Urutan Bilangan Rasional

Pengertian "*kurang dari*" pada bilangan rasional dikenalkan melalui pendekatan garis bilangan, pendekatan penyebut positif sama, dan pendekatan penjumlahan. Dengan pendekatan garis bilangan, bilangan rasional $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ditunjukkan dengan letak $\frac{a}{b}$ di sebelah kiri $\frac{c}{d}$, dengan penyebut positif yang sama, bilangan rasional $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ditunjukkan dengan $a < c$, $b > 0$.

Menggunakan pendekatan penjumlahan bentuk $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ditunjukkan dengan adanya bilangan rasional positif $\frac{p}{q}$, sedemikian sehingga $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{c}{d}$. Dapat pula dikatakan bahwa $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ adalah bilangan positif.

Sifat urutan bilangan Rasional

Misalkan $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, dan \frac{e}{f}$ masing-masing merupakan bilangan rasional.

a. Sifat transisi kurang dari;

Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ maka $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$

b. Sifat kurang dari dan penjumlahan;
Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

c. Sifat kurang dai dan perkaian dengan bilangan positif;
Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f} > 0$ maka $\frac{a}{b} . \frac{e}{f} < \frac{c}{d} . \frac{e}{f}$

d. Sifat kurang dai dan perkaian dengan bilangan negatif;
Jika $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan $\frac{e}{f} < 0$ maka $\frac{a}{b} . \frac{e}{f} > \frac{c}{d} . \frac{e}{f}$

Sifat-sifat urutan seperti ditunjukkan di atas tetap berlaku apabila simbol < diubah dengan ≤, >, dan ≥. Tampak bahwa ketiga sifat urutan yang pertama berlaku pada semesta himpunan bilangan *cacah*, tetapi sifat yang keempat tidak berlaku pada semesta himpunan bilangan *cacah*. Sifat urutan bilangan rasional dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan.

D. Pertidaksamaan

1. Notasi

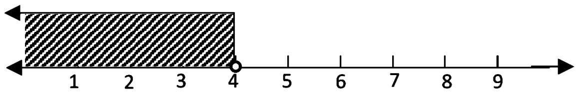
Pada sistem pertidaksamaan terdapat notasi atau simbol yang harus kita ketahui terlebih dahulu;

a. Lebih kecil di notasikan <
b. Lebih kecil atau sama dengan dinotasikan ≤
c. Lebih besar di notasikan >
d. Lebih besar atau sama dengan dinotasikan ≥

Notasi-notasi di atas digunakan untuk membuat suatu Batasan terhadap nilai suatu variabel.

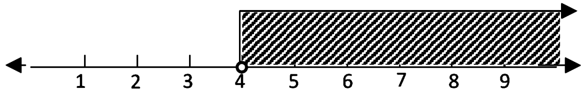
Contoh:

1) $x < 4$
Ini berarti bahwa nilai *x* selalu lebih kecil atau di bawah dari 4, dan tidak sama atau lebih besar dari 4. Dalam garis bilangan daerah yang di arsir merupakan nilai *x* yang memenuhi.



2) $x \geq 4$

Ini berarti bahwa nilai x selalu lebih kecil atau di bawah dari 4, dan tidak sama atau lebih besar dari 4. Dalam garis bilangan daerah yang di arsir merupakan nilai x yang memenuhi.



2. Sifat Pertidaksamaan

a. Definisi pertidaksamaan tidak akan berubah apabila tiap-tiap ruas atau sisi ditambah atau dikurangi dengan bilangan nyata yang sama. Hal ini mengakibatkan bahwa sembarang suku bisa dipindahkan dari satu sisi ke sisi lain dalam suatu pertidaksamaan, dengan syarat tanda suku diubah.

Contoh:

$a > b$, dapat diubah menjadi;

$$a + c > b + c$$
$$a - b = 0$$

b. Definisi sebuah pertidaksamaan tidak berubah apabila tiap sisi dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

Contoh:

$a > b$ dan $k > 0$, dapat dikalikan atau dibagi, hasilnya:

$$ka > kb$$
$$\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$$

c. Definisi sebuah pertidaksamaan berubah apabila tiap-tiap sisi dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatip yang sama.

Contoh:

$a > b$ dan $k < 0$, dapat dikalikan atau dibagi, hasilnya:

$$ka < kb$$

$$\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$$

d. Jika $a > b$ dan a, b, n adalah bilangan positif, maka $a^n > b^n$, tetapi $a^{-n} < b^{-n}$
Contoh:
5 > 3, maka dapat dipangkatkan, hasilnya:
$5^3 > 3^3$ atau 125 > 27
$5^{-3} < 3^{-3}$ atau $\frac{1}{125} < \frac{1}{27}$

e. Jika $a < b$ dan a dan b negatif, n positif, genap, maka $a^n > b^n$.
Contoh:
-7 < -2, maka dapat dipangkatkan, hasilnya:
$-7^2 > -2^2$ atau 49 > 4

f. Jika $a < b$ dan a dan b negatif, n positif, ganjil, maka $a^n > b^n$.
Contoh:
-7 < -2, maka dapat dipangkatkan, hasilnya:
$-7^3 < -2^3$ atau -343 < -8

g. Jika $a > b$ dan $c > d$, maka $(a + c) > (b + d)$
Contoh:
-4 > - 10 dan 6 > 3, maka hasilnya:
(-4 + 6) > (-10 + 3) atau 2 > -7

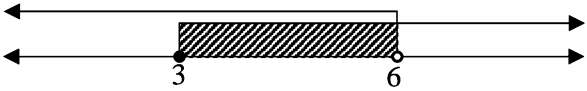
h. Jika $a > b > 0$ dan $c > d > 0$, maka $ac > bd$
Contoh:
6 > 5 > 0 dan 3 > 2 > 0, maka hasilnya:
(6)(3) > (5)(2) atau 18 > 10

i. Penggabungan dua pertidaksamaan.
Dua pertidaksamaan dapat digabung dengan penghubung *dan* atau *atau.*
Dan memiliki definisi irisan pertidaksamaan I dan II harus memenuhi keduanya.

Contoh:

$x < 6$ dan $x \geq 3$

Bentuk irisannya:

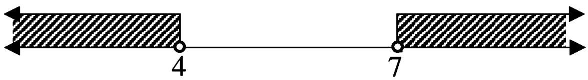


Atau memiliki definisi irisan pertidaksamaan I dan II salah satunya harus terpenuhi.

Contoh:

$x < 4$ atau $x > 7$

Bentuk irisannya:



3. Bentuk Pertidaksamaan

a. Pertidaksamaan linear

1) Pertidaksamaan linear satu variabel

Contoh:

a) $3x - 4 > 5$
$3x > 5 + 4$
$3x > 9$
$x > 3$

b) $3x + 6 > 7(x - 2)$
$3x + 6 > 7x - 14$
$14 + 6 > 7x - 3x$
$20 > 4x$
$5 > x$

2) Pertidaksamaan linear dua variabel

Contoh:

a) $2x + 3y \leq 6$

Pada x = 0 $\Rightarrow$ $3y \leq 6$, maka $y \leq 2$

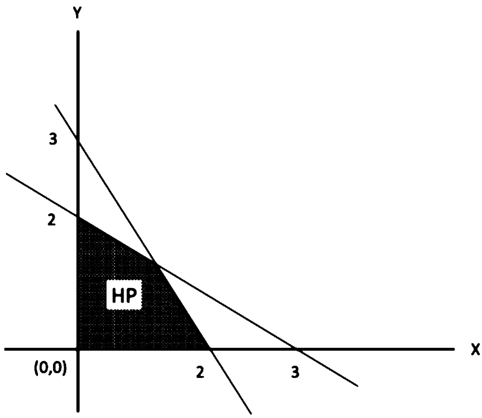
Pada y = 0 $\Rightarrow$ $2x \leq 6$, maka $y \leq 3$

b) $3x + 2y \leq 6$

Pada x = 0 $\Rightarrow$ $2y \leq 6$, maka $y \leq 3$

Pada y = 0 $\Rightarrow$ $3x \leq 6$, maka $y \leq 2$

Jika pertidaksamaan di atas di gambar dalam diagram cartesius seperti berikut ini:



Gambar 2.3. Diagram Himpunan Penyelesaian

3) Pertidaksamaan Kuadrat

Cara dalam penyelesaian pertidaksamaan kuadrat adalah:

a) Ruas kanan dinolkan
b) Ruas kiri difaktorkan
c) Menggunakan garis bilangan
d) Cari harga nol

Contoh:

Tentukan daerah himpunan penyelesaian untuk $x^2 - 5x - 6 \leq 0$

Penyelesaian:

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$x^2 - 6x + x - 6 \leq 0$

$(x^2 - 6x) + (x - 6) \leq 0$

$x\,(x - 6x) + 1(x - 6) \leq 0$

$(x - 6x) + (x + 1) \leq 0$

$x - 6 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$

$x_1 = 6 \qquad\qquad x_2 = -1$

+++++++ ---------- +++++++

-1 6

Jadi himpunan penyelesaiannya (HP):

$-1 \leq x \leq 6$

Untuk menentukan daerah + atau – caranya pilih salah satu nilai dalam wilayah yang bersangkutan, kemudian masukkan nilai ke dalam persamaan dan lihat/hitung hasilnya. Misalnya dipilih angka 0 (nol), kemudian masukkan ke dalam persamaan:

$x^2 - 5x - 6 = 0 = 0 - 0 - 6 = -6$

Jadi wilayah pada nilai 0 (nol) adalah – negatif, untuk wilayah lainnya adalah kebalikan dari wilayah yang berdekatan.

E. Nilai Mutlak

Nilai mutlak bilangan real x, dinyatakan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, Jika\ x \geq 0 \\ -x, Jika\ x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

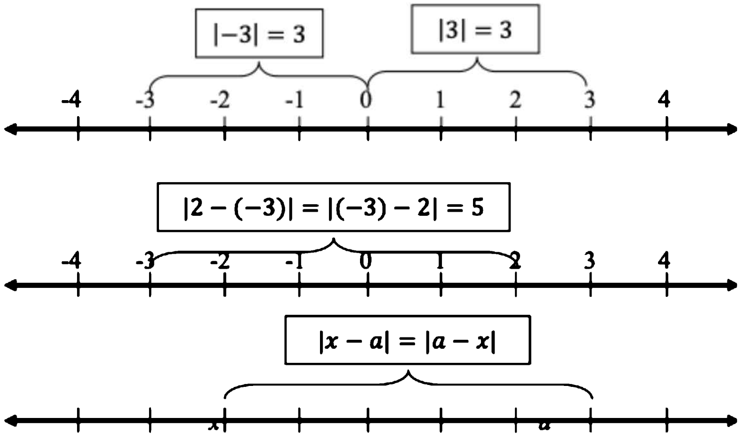
$$|-5| = 5, |+2| = 2, \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}, |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, |0| = 0$$

Dalam ilmu ukur, nilai mutlak dapat dibayangkan sebagai ***jarak (tak beraturan).***

$$|x| = jarak\ antara\ x\ ke\ titik\ asal\ 0$$

$$|x-a| = jarak\ antara\ x\ ke\ a$$

Perhatikan garis bilangan berikut ini:



1. Sifat Nilai Mutlak

a. $|ab| = |a||b|$

b. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

c. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Ketaksamaan Segitiga)

d. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Bukti:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a||b|$$

2. Turunan Sifat

a. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

b. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a\ atau\ x > a$

Contoh:

1) $|3x+4| = 7$
2) $|x-2| = |3-2x|$
3) $\left|2x + \frac{5}{x}\right| < 1$

Perlu diingat kembali,

$$\sqrt{a} = akar\ kuadrat\ utama\ dari\ a$$
$$(akar\ tak\ negatif)$$

Contoh:

1) $\sqrt{16} \neq \pm 4\ tetapi\ \sqrt{16} = 4$
2) $\sqrt{(10)^2} = 10$
3) Akar kuadrat dari 5 adalah $\pm\sqrt{5}$

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = |\boldsymbol{x}|$$

3. Turunan Sifat (lanjutan)

a. $|x|^2 = x^2$
b. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Bukti:

a. $|x|^2 = |x||x| = |x|^2 = x^2$
b. $|x| < |y| \Rightarrow |x||x| < |y||x|\ dan\ |x||y| < |y||y| \Rightarrow |x|^2 < |x||y|\ dan\ |x||y| < |y|^2 \Rightarrow x^2 < y^2$

(Operasi pengkuadratan tidak selalu mempertahankan pertidaksamaan)

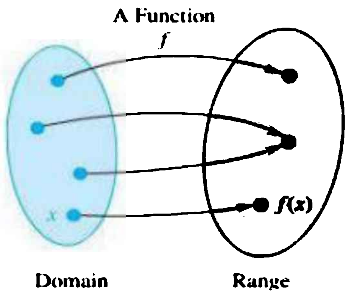
BAB III
FUNGSI DAN LIMIT

A. Fungsi

1. Definisi Fungsi

Definisi :

Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek *x* dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal *f(x)* dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi. (lihat gambar di bawah).



Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti *f* (atau *F*). Maka *f(x)* dibaca "*f* dari *x*" atau "*f* pada *x*", menunjukkan nilai yang diberikan oleh *f* kepada *x*. Jadi, jika $f(x) = x^3 - 4$.

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$
$$f(a) = a^3 - 4$$
$$f(a+h) = (a+h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Daerah asal adalah himpunan elemen-elemen dimana fungsi itu mendapat nilai dan daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai yang diperoleh secara demikian.

Pada Kalkulus dasar hanya dipelajari fungsi real, yaitu fungsi dengan domain dan kodomain subhimpunan bilangan real. Dengan demikian $f(x) = x^3 - 4,\ x \in \mathbb{R}$.

Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, kita selalu menganggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan terbesar bilangan real sedemikian rupa sehingga aturan fungsi ada maknanyadan memberikan bilangan real. Ini disebut daerah asal alami. Bilangan-bilangan yang harus diingat untuk ditiadakan dari daerah asal alami adalah nilai-nilai yang menyebabkan munculnya pembagian dengan nol atau akar kuadrat bilangan negatif.

Contoh :

Carilah daerah asal alami untuk $f(x) = \sqrt{9 - t^2}$

Penyelesaian :

Disini kita harus membatasi t sedemikian rupa sehingga $9 - t^2 \geq 0$, dengan tujuan menghindari akar kuadrat negatif. Ini dicapai dengan mensyaratkan bahwa $|t| \leq 3$. Sehingga diperoleh daerah asal alami adalah $\{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 3\}$. Dalam cara penulisan selang, kita menulis daerah asal sebagai $[-3,3]$.

2. Grafik Fungsi

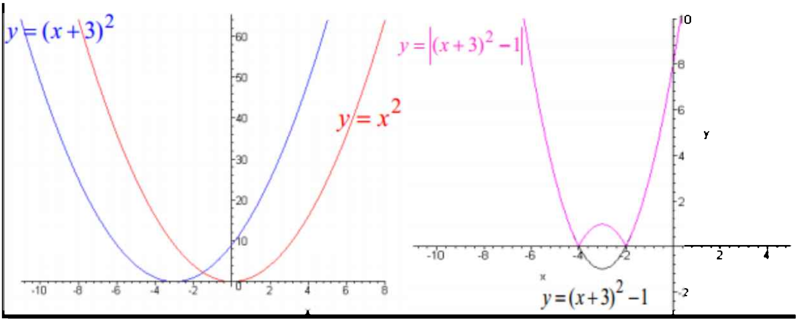
Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan fungsi f adalah grafik dari persamaan y = f(x).

Contoh :

Buatlah sketsa grafik fungsi y $=|x^2 + 6x + 8|$ dapat dipeoleh dari grafik fungsi $y=x^2$, sebab y$=|x^2 + 6x + 8| = |(x + 3)^2 - 1|$

Penyelesaian :

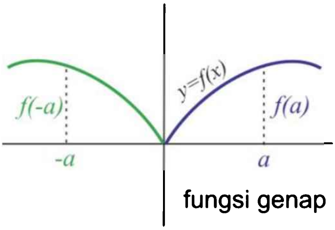
Grafik $y=x^2$ digeser ke kiri 3 satuan, lalu digeser ke bawah 1 satuan. Selanjutnya bagian grafik yang di bawah sumbu x dicerminkan terhadap sumbu x.

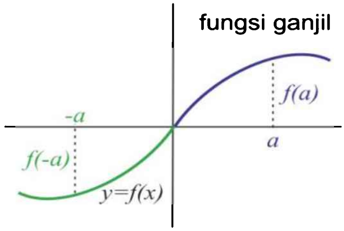


3. **Fungsi-Fungsi istimewa**
   a. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

      Jika f(-x)=f(x) utnuk semua x, maka grafik simetris terhadap sumbu y. Fungsi yang demikian disebut fungsi genap, barangkali karena fungsi yang menentukan f(x) sebagai jumlah dari pangkat-pangkat genap x adalah genap.

      Jika f(-x)= -f(x) untuk semua x, grafik simetris terhadap titik asal. Fungsi yang demikian disebut fungsi ganjil. Fungsi memberikan f(x) sebagai jumlah dari pangkat-pangkat ganjil x adalah ganjil.





   b. Fungsi Implisit dan eksplisit

      Fungsi eksplisit y terhadap x adalah fungsi dengan aturan y = f(x)

      Fungsi implisit jika f(x,y) = 0 dengan peubah x dan y.

c. Fungsi Harga Mutlak

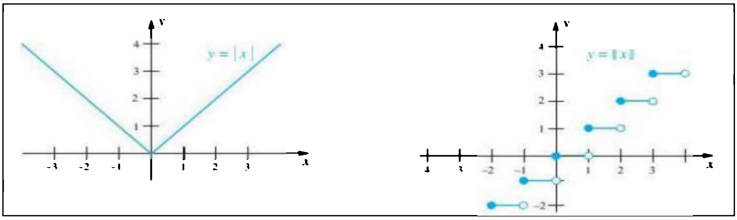
$$|x| = \begin{cases} x & jika\, x \geq 0 \\ -x & jika\, x < 0 \end{cases}$$

d. Fungsi Bialangan Bulat Terbesar

$[\![x]\!]$= bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

Jadi, $|-3{,}1| = |3{,}1|$ = 3,1 sedangkan

$[\![-3{,}1]\!]$ = - 4 dan $[\![3{,}1]\!]$ = 3



4. Operasi pada Fungsi

Fungsi bukanlah bilangan, tetapi seperti halnya dua bilangan a dan b dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah bilangan baru a + b, demikian juga dua fungsi f dan g dapat ditambahkan untuk menghasilkan fungsi baru f + g. Berikut penjumlahan, selisih, hasilkali, hasilbagi, pangkat misalkan fungsi –fungsi f dan g dengan rumus-rumus :

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Rumus	Daerah Asal
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{x-3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

5. Komposisi Fungsi

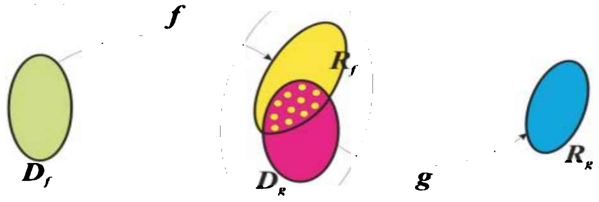
Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan f(x) dan g kemudian bekerja pada f(x) untuk menghasilkan g(f(x)), dikatakan bahwa mengkomposisikan g dengan f. Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi g dengan f, dinyatakan oleh $g \circ f$. Jadi,

$$(g^\circ f)(x) = g(f(x))$$

Dengan, x adalah daerah asal f, f(x) adalah daerah asal g.

Contoh :

Bagaimana cara menentukan $D_{g\ o\ f}$ dan $R_{g\ o\ f}$ pada gambar di bawah ini.



Penyelesaian :

Titik-titik dari D_f yang dapat dievaluasi yang dapat dievaluasi oleh fungsi komposisi g o f adalah titik-titik yang oleh fungsi f dipetakan ke dalam D_g (mengapa?). sebut $A = R_f \cap D_{g,}$ maka :

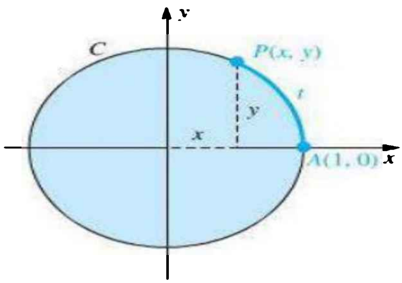
$D_{g\circ f} = f^{-1}(A)$ dan $R_{g\circ f} = g(A)$

6. Fungsi Trigonometri

Secara lebih umum, kita mendefinisikan fungsi trigonometri yang didasarkan pada lingkaran satuan (unit circle). Lingkaran satuan, yang dinyatakan sebagai C, adalah lingkaran dengan jari-jari 1 dan berpusat di titik asal, lingkaran ini memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 1$. Andaikan A adalah titik (1,0) dan andaikan t sebarang bilangan positif. Maka terdapat satu titik P(x,y) pada C sedemikian rupa sehingga panjang busur AP, yang diukur menurut arah berlawanan dengan putaran jarum jam dari A sepanjang lingkaran satuan sama dengan t (lihat gambar). Ingatlah bahwa keliling sebuah lingkaran dengan jari-jari r adalah $2\pi r$, maka keliling C adalah 2π. Jadi, jika t = π, maka titik

P adalah tepat setengahnya dari keliling lingkaran dari titik A, dalam hal ini, P adalah titik (-1,0). Jika t=$3\pi/2$, maka P adalah titik (0,-1) dan jika t =2π, maka P adalah titik A. jika t$> 2\pi$, maka diperlukan lebih dari satu putaran lengkap dari lingkaran satuan untuk menelusuri busur AP.

Ketika t < 0, kita menelusuri lingkaran dengan arah putaran jarum jam, maka terdapat tepat satu titik P pada lingkaran C sedemikian rupa sehingga panjang yang diukur searah putaran jarum jam dari A adalah t. Jadi, untuk setiap bilangan real t, kita dapat menghubungkannya dengan sebuah titik khas P(x,y) pada lingkaran satuan. Ini membolehkan kita membuat definisi kunci dari sinus dan kosinus. Fungsi sinus dan kosinus ditulis sebagai sin dan cos, dan bukannya dalam huruf tungga f atau g. Tanda kurung disekitar peubah bebas biasanya dihilangkan agar tidak menimbulkan kerancuan.



Defenisi (Fungsi Sinus dan cosinus)

Andaikan *t* menemukan titik *P(x,y)* seperti ditunjukkan di atas maka,

Fungsi trigonometri lainnya

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Sifat-sifat penting fungsi Trigonometri :

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $\sin(-x) = \sin x$ **dan** $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
  $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ **dan** $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
- $\sin x + \sin y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
  $\cos x + \cos y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$
  $\cos x - \cos y = -2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$

7. Katalog Parsial Fungsi

Sebuah fungsi berbentuk f(x) = k, dengan k konstanta (bilangan real) disebut *fungsi konstanta.* Fungsi f(x) = x disebut *fungsi identitas.* Sebarang fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstanta dan fungsi identitas dengan menggunakan operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian disebut *fungsi polinomial.* Sama saja dengan mengatakan bahwa f adalah fungsi polinomial jika berbentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan koefisien-koefisien a berupa bilangan real dan n bilangan bulat tak negatif. Jika $a_n \neq 0$, maka n adalah derajat fungsi polinom tersebut. Secara khusus, $f(x) = ax + b$ adalah fungsi derajat satu, atau *fungsi linear* dan $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah fungsi derajat dua, atau *fungsi kuadrat.* Hasil bagi fungsi-fungsi polinom tersebut disebut *fungsi rasional.* Jadi f adalah fungsi rasional jika berbentuk $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$. Daerah asal fungsi rasional terdiri atas bilangan real dengan penyebut tidak nol. Dan *fungsi aljabar eksplisit* adalah fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas melalui operasi penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan penarikan akar, contohnya $g(x) = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x^3 \sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

TUGAS III.1

1. Carilah daerah asal alami fungsi berikut :

a. f(x) = $\sqrt{2x+3}$
b. f(x) =$\frac{1}{(4x-1)}$
c. f(x) = $|2u+3|$
2. Nyatakanlah apakah fungsi yang berikut genap atau ganjil atau tidak satupun kemudian gambarkan grafiknya :
a. f(x) = $\frac{x}{x^2+1}$
b. f(x) = 3x - $\sqrt{2}$
3. Untuk f(x) = x + 3 dan g(x) = x^2. Carilah tiap nilai dari :
a. (f + g)(2)
b. (g/f)(3)
c. (g o f) (-8)
d. (f.g)(0)
4. Periksalah kebenaran kesamaan berikut
a. (1+sin z)(1-sinz) = $\frac{1}{sec^2 z}$
b. (sec t – 1) (sec t + 1) = $\tan^2$ t
c. $\frac{\sin u}{\csc u} + \frac{\cos u}{\sec u} = 1$
5. Gambarlah grafik persamaan berikut pada $[-\pi, 2\pi]$
a. y = sin 2x
b. $y = cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
c. y = sec t

B. Limit

1. Definisi Limit

Pengertian limit secara intuisi :

> Mengatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c} L$ berarti bahwa bilamana *x* dekat tetapi berlainan dari *c*. maka $f(x)$ dekat ke L.

Contoh:

Perhatikan fungsi aljabar $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. Agar fungsi f(x) terdefinisi, nilai x dibatasi yaitu $x \neq 1$. Jika batas nilai x tersebut di dekati, akan diperoleh hasil bahwa nilai fungsi mendekati 3, seperti terlihat pada tabel berikut:

x	0,99	0,999	0,9999	0,99999	. .	1	. .	1,00001	1,0001	1,001
$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$	2,9701	2,997001	2,997	2,99997	. .	-	. .	3,00003	3,0003	3,003001

Pada kasus seperti di atas dikatakan limit $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ untuk x mendekati 1 adalah 3, ditulis : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3.$

Ini dibaca "limit $\frac{x^3-1}{x-1}$ untuk x mendekati 1 adalah 3".

Dengan menyelesaikan limit secara aljabar (dengan demikian mengetahui bagaimana memfaktorkan selisih pangkat 3), di peroleh :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) - (x^2 + x + 1)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Perhatikan bahwa kita tidak mensyaratkan sesuatu agar benar tepat di *c*. Fungsi *f* bahkan tidak perlu terdefinisi di *c*, juga tidak dalam contoh $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ di atas. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi *dekat c*, bukannya di *c*.

Teorema A (Teorema Limit Utama)
Andaikan *n* adalah bilangan bulat positif, *k* adalah konstanta dan *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di *c*.

Maka :

a. $\lim_{x \to c} k = k$
b. $\lim_{x \to c} x = c$
c. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
d. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
e. $\lim_{x \to c} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x)$
f. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
g. $\lim_{x \to c} [f(x)]^2 = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^2$
h. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$,asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ jika n genap

Bukti teorema limit utama bagian d :
Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$. Jika terdapat $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - c|\delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - c|\delta_2 \Longrightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan :

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Maka disimpulkan $0 < |x - c|\delta \Longrightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$ sehingga terbukti bahwa $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$.

Teorema limit utama digunakan untuk memperoleh penyelesaian limit dari sebuah fungsi. Untuk beberapa kasus fungsi polinom atau fungsi rasional, penyelesaian limit dapat didasarkan teorema subtitusi, yaitu :

Teorema B (Teorema Subtitusi)
Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka:
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Asalkan f(c) terdefinisi. Dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c titik nol.
Contoh :
Mencari penyelesaian $\lim_{x \to 2} \frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x-8}$
Penyelesaian :
Pada kasus fungsi rasional ini nilai penyebut untuk x=2 titik nol, maka dapat diselesaikan berdasarkan teorema B, sehingga
$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8}$$
$$= -\frac{11}{2}$$

Teorema C (Teorema Apit)
Andaikan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Contoh:
Carilah $\lim_{x \to 3} 2x^4$
Penyelesaian :
$$\lim_{x \to 3} 2x^4 = 2 \lim_{x \to 3} x^4 = 2 \left[\lim_{x \to 3} x\right]^4 = 2[3]^4 = 162$$

2. Limit Sepihak

Pada definisi limit fungsi di satu titik, $f(x)$ terdefinisi pada suatu selang buka yang memuat *a*, kecuali mungkin dia sendiri. Artinya nilai-nilai *x* yang dekat dengan *a*, dapat kurang dari *a* dan dapat lebih dari *a*.

Misal $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Fungsi di atas tidak terdefinisi dalam selang buka yang memuat -4, juga tidak terdefinisi dalam selang buka yang memuat 4, hal ini dikarenakan daerah definisi $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ adalah [-4,4], Dengan demikian kita dapat mengatakan $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{16 - x^2}$ dan $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2}$. Namun demikian $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ dapat dibuat sedekat mungkin menurut kehendak kita ke 0, dengan memilih nilai x yang cukup dekat dengan -4 (asalkan lebih besar -4). Dengan kata lain $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ akan mendekati 0 dengan memilih x yang dekat denga (-4) dari arah kanan. Sehingga $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ mempunyai limit kanan di -4 dengan nilai limit 0 dan ditulis $\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} = L^- = 0$. Demikian juga $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ dapat dibuat sedekat mungkin menurut kehendak kita ke 0, dengan memilih nilai x yang cukup dekat dengan 4 (asalkan lebih kecil dari 4). Dengan kata lain $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ akan mendekati 0 dengan memilih x yang dekat dengan (4) dari arah kiri. Sehingga $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ mempunyai limit kiri di 4 dengan nilai limit 0 dan ditulis $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2} = L^- = 0$

Definisi Limit Kiri dan Limit Kanan

Mengatakan bahwa $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ dekat ke L .
Hal yang serupa, mengatakan bahwa $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ adalah dekat ke L.

Teorema
$\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$

Dengan menggunakan teorema prinsip apit dan rumus geometri kita dapatkan teorema dasar dari limit fungsi trigonometri sebagai berikut :

Teorema 1
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dalam membuktikan teorema di atas kita dapatkan suatu akibat yaitu
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Dengan menggunakan teorema dasar limit fungsi trigonometri dapat dibuktikan teorema-teorema berikut:

Teorema 2

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

4) $\lim \dfrac{arc \sin x}{} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{arc \sin x} = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arc \tan x}{x} = 1$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{arc \tan x} = 1$

Bentuk-bentuk di atas dinamakan dengan limit fungsi trigonometri. Dengan berpandu pada teorema limit dan bentuk tak tentu. Maka persoalan tentang limit fungsi trigonometri dapat diselesaikan.

Untuk keperluan praktis teorema tersebut dapat dikembangkan menjadi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

Seperti pada fungsi aljabar, maka pada fungsi trigonometri juga berlaku bahwa jika *f*(a) terdefinisi, maka: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x + \cos x) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2}}{2\sin\dfrac{\pi}{2} + 3\cos\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$

Berikut ini akan dibahas limit Fungsi Trigonometri bentuk tak tentu yaitu : $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$

Limit Bentuk $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\tan 4x} = \dfrac{3}{4}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{3x\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x}{3x \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x \sin x}{3x\sin x} = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{2\cos\frac{1}{2}(x+a)\sin\frac{1}{2}(x-a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} 2\cos\frac{1}{2}(x+a)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} 2\cos\dfrac{1}{2}(x+a) \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$

$= 2\cos\dfrac{1}{2}(a+a).\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$= \cos a$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t}$

Jawab

Bentuk di atas menghasilkan $\dfrac{0}{0}$ sehingga

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(3t) + 4t}{t \sec t} = \lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{\sin(3t)}{t \sec t} + \dfrac{4t}{t \sec t}\right)$

$=`\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin 3t}{t} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{\sec t} + \lim\limits_{t \to o} \dfrac{4}{\sec t}$

$= 3 + 4$

$= 7$

Limit Bentuk $\infty - \infty$

Limit bentuk $(\infty - \infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

Contoh :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Limit Bentuk $(0.\infty)$

Limit bentuk $(0.\infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Contoh :

$$\lim_{x\to1}(x-1).\tan\tfrac{1}{2}\pi x = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$$

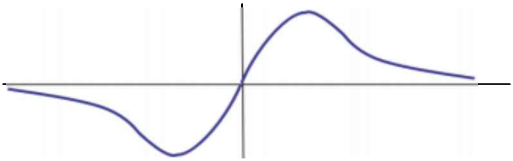
$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}\right)_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{\pi}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

3. Limit Tak Hingga

Bagian ini mengamati perilaku fungsi *f(x)* bila $x \ \frac{membesar}{mengecil}$ tanpa batas.

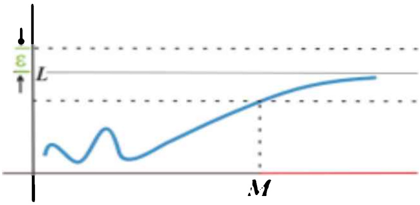
Ilustrasi :



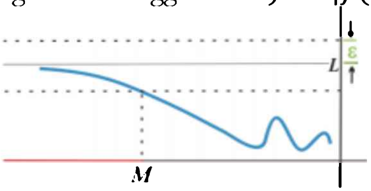
Perhatikan $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Bila *x* membesar terus tanpa batas dotilis *x* →∝, *f(x)* cenderung menuju nol.

Fenomena ini mendasari konsep limit tak hingga



Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$. $\lim_{x\to\infty} = L$ artinya untuk setiap $\in >$ 0, dapat dicari bilangan M sehingga x > M) $\Longrightarrow |f(x) - L| < \in$.



Misalkan f terdefinisi pada $(-\propto, c)$. $\lim_{x\to-\infty} = L$ artinya untuk setiap $\in$ > 0, dapat dicari bilangan M sehingga $x < M \Longrightarrow |f(x) - L| < \in$.

Definisi Limit tak berhingga :

a. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

b. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$

c. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$
d. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
e. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
f. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Berkaitan dengan Asimtot

Jika garis x = c adalah asimtot tegak dari grafik y = f(x) jika salah satu dari empat pernyataan berikut benar :

a. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
b. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
c. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
d. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Jika Garis y = b adalah asimtot mendatar dari grafik y = f(x) jika :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Contoh :

Tentukan asimtot tegak dan mendatar dari grafik *y = f(x)* jika

Untuk asimtot tegak,

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

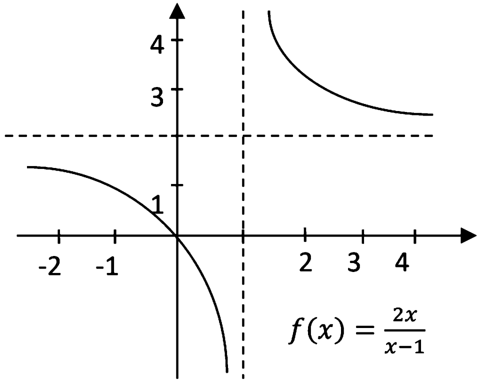
Penyelesaian :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

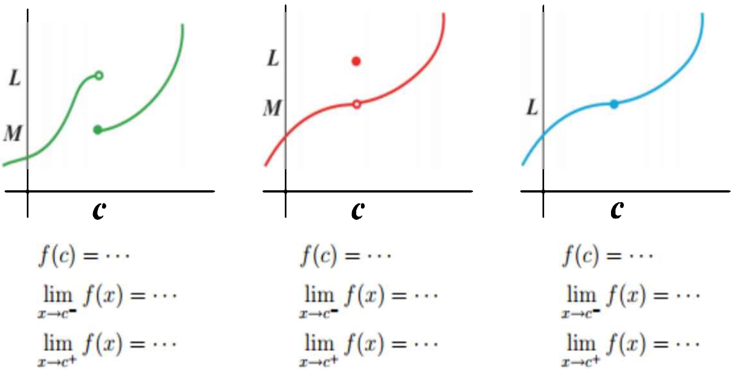
Dipihak lain,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1-1/x} = 2 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Dan juga y = 2 adalah asimtot mendatar. Grafik y = $\frac{2x}{x-1}$ ditunjukkan dalam gambar



4. Kekontinuan Fungsi



Kekontinuan di suatu titik :

Misalkan *f(x)* terdefinisi pada interval buka I dan $c \in I$. Fungsi f disebut kontinu di titik c jika:

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) \Leftrightarrow f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Kekontinuan Sepihak :

1) Fungsi f disebut kontinu kiri di $x = c$ bila $f(c) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

2) Fungsi *f* disebut kontinu kiri di $x = c$ bila $f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$

Kekontinuan pada interval :

1) Fungsi *f* disebut kontinu pada interval buka (*a, b*) bila *f* kontinu disetiap titik pada (*a, b*)
2) Fungsi *f* disebut kontinu pada interval tutup $[a, b]$ bila *f* kontinu pada (*a,b*), kontinu kanan di *a* dan kontinu kiri di *b*.

Sifat-sifat kekontinuan :

1) Suatu polinom *p(x)* kontinu pada seluruh ℝ
2) Fungsi rasional ($\frac{p(x)}{q(x)}, p(x), dan\ q(x)$ polinom), kontinu pada seluruh daerah definisinya
3) Fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di seluruh ℝ
4) Fungsi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ dengan n ϵ N kontinu diseluruh daerah definisinya
5) Bila *f* dan *g* kontinu di titik *c* dan k ∈ ℝ, maka:

$kf, f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}$ dengan $g(c) \neq 0, f^n$, dan $\sqrt[n]{f}$ kontinu $di\ c$.

TUGAS III.2

1. Carilah :
   a. $\lim\limits_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$
   b. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$
   c. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7x^5-10x^4-13x+6}{3x^2-6x-8}$
2. Cari setiap limit kanan dan limit kiri atau nyatakan bahwa limit itu tidak ada
   a. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$
   b. $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3-x}}{x}$
   c. $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$
3. Tentukanlah :
   a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$
   b. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{x^2 \sin 2x}{x-\pi}$
   c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin\left(1-\frac{1}{x}\right)\cos\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x-1}$
4. Sketsakan sebuah grafik fungsi yang memenuhi semua sifat berikut :
   1) Daerah definisinya $[-2,4]$
   2) $f(-2)=f(0)=f(1)=f(3)=f(4)=1$
   3) f kontinu diseluruh D_f kecuali -2, 0, 3
   4) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$

BAB IV
TURUNAN FUNGSI

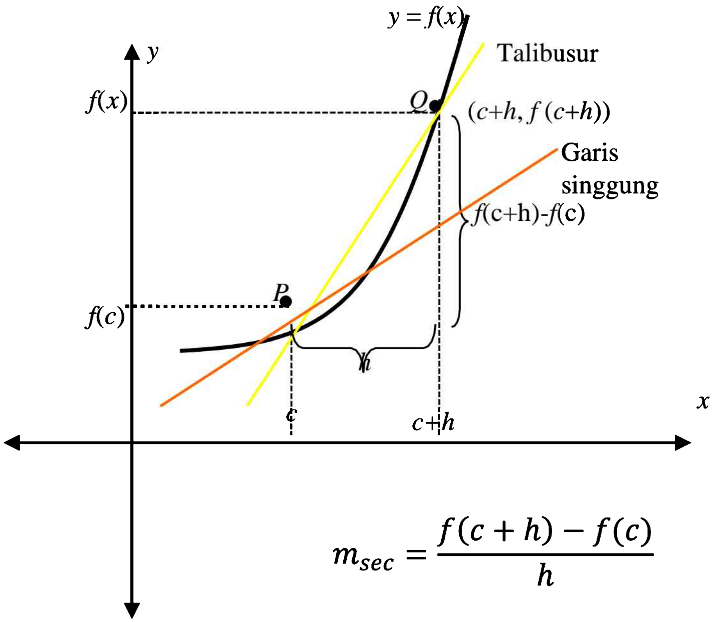
A. Pengertian Turunan

1. Pendahuluan

Berbagai aturan pencarian turunan atau aturan diferensial dirumuskan dalam teorema yang dibuktikan kebenarannya dan dijabarkan dalam buku-buku kalkulus, seperti sifat-sifat atau aturan pangkat, aturan perkalian dan aturan pembagaian (Sari, 2018). Begitu pula pada buku ini. Fungsi dengan suku-suku yang dipangkatkan dengan pangkat yang sangat besar tidak bisa diselesiakn dengan aturan-aturan pencarian turunan biasa, namun perlu menerapkan dalil aturan rantai, dengan demikian akan dibahas pula aturan rantai pada bab ini. Kalkulus adalah cabang ilmu matematika yang mencakup topik-topik kecepatan, akselerasi, dan optimasi. Konsep turunan berasal dari pemikiran tentang kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat (Hasanah, 2019). Oleh karena itu sebelum mengkaji pengertian turunan, terlebih dahulu dibahas dua masalah berbeda namun sesungguhnya masih dalam satu tema yang sam tentang turunan yaitu garis singgung dan kecepatan sesaat.

2. Garis Singgung

Andaikan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$. Maka P mempunyai koordinat $(c, f(c))$, titik Q didekatnya mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$ dan tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan m_{sec} (Purcell dan Varberg, 1987).



$$m_{sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Gambar 4.1.

Oleh karena itu, garis singgung tersebut (jika tidak tegak lurus) adalah garis yang melalui P dengan kemiringan m_{tan} yang memenuhi :

$$\boxed{m_{tan} = \lim_{h \to 0} m_{sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}}$$

Contoh

Cari kemiringan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2$ pada $x = 2$.

Penyelesaian

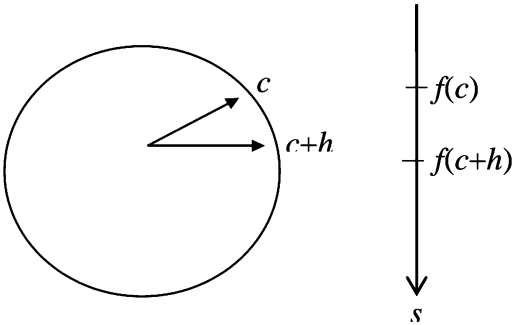
$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)^2 - 2^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 4 = 4$$

3. Kecepatan Sesaat

Misalkan benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan pada saat berada di c + h, benda berada di $f(c+h)$.



Gambar 4.2.

Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu $[c, c+h]$ adalah:

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika $h \to 0$, diperoleh kecepatan sesaat di x = c

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Contoh

Hitunglah kecepatan sesaat dari sebuah benda jatuh beranjak dari posisi diam pada t = 3,8 detik dan pada t = 5,4 detik, dengan fungsi waktu yang diberikan adalah $f(t) = 16t^2$.

Penyelesaian

Dihitung kecepatan pada $t = c$ detik terlebih dahulu

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{32ch + 16h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(32c + 16h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3c + 16h) = 3c \end{aligned}$$

Dengan demikian kecepatan pada saat 3,8 detik adalah 32(3,8) = 121,6 meter/detik, dan pada saat 5,4 detik adalah 32(5,4) = 172,8.

4. Definisi Turunan

Garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran yang sama yang mengilhami konsep turunan. Berikut adalah definisi turunan (derivatif):

Definisi 4.1.

Turunan fungsi *f* adalah fungsi lain f' (dibaca “f aksen”) yang nilainya sebarang pada bilangan c :

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Dengan melihat syarat pada definisi tersebut, maka suatu fungsi *f* dapat diturunkan (didiferensialkan) jika limit *f* ada. Berikut disajikan beberapa contoh penyelesaian turunan menggunakan definisi turunan fungsi. Dari definisi ini juga dapat dikatakan bahwa deinisi turunan fungsi melibatkan limit hasil bagi dan selisih (Sagala, 2017). Dalam buku ini notasi turunan fungsi selain menggunakan tanda aksen, juga menggunkan simbol *D,* yang merupakan kepanjangan dari derivatif.

Contoh

Carilah nilai turunan dari *f* dengan menggunakan definisi

a. Jika $f(x) = 10x - 5$, cari $f'(4)$

b. Jika $f(x) = x^3 + 5x$, cari $f'(c)$

Penyelesiaian

a. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{[10(4+h)-5)]-[10(4)-5]}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[40+10h-5]-[40-5]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0} 10 = 10$$

b. $f'(c) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^3-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)^3+5(c+h)-f(c^3+5c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(c+h)(c^2+2ch+h^2)+5c+5h-c^3-5c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c^3+2c^2h+ch^2+ch^2+c^2h+2ch^2+h^3+5c+5h-c^3-5c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3c^2h+3ch^2+h^3+5h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3c^2+3ch+h^2+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3c^2 + 3ch + h^2 + 5$$

$$= 3c^2 + 5$$

Misalkan $x = c$, maka definisi turunan fungsi di atas (definisi 4.1.) dapat dituliskan menjadi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Contoh

Carilah turunan fungsi berikut menggunakan definisi

a. $f(x) = x^2 - 5x - 6$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

Penyelesaian

a. $f(x) = x^2 - 5x - 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2-5(x+h)-6]-(x^2-5x-6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-5x-5h-6-x^2+5x+6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2-5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h-5)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h - 5 \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

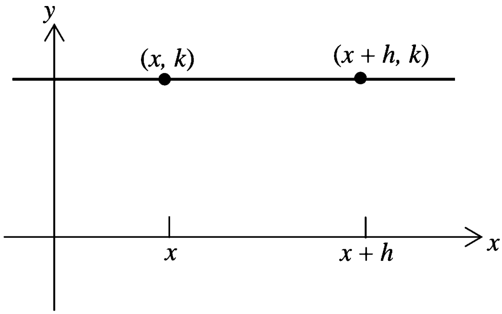
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Jadi turunan yang diberikan adalah $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, dengan daearah asalnya adalah bilangan riil kecuali $x = 0$

B. Turunan Fungsi Konstan, Fungsi Pangkat, dan Fungsi Identitas

1. Turunan Fungsi Konstan

Fungsi konstan $f(x) = k$ tidak memiliki kemiringan atau kemringannya sama dengan nol karena grafiknya berupa garis horisontal, yaitu garis yang sejajar dengan sumbu x. (Gambar 4.3).



Gambar 4.3

> *Teorema A*
> Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta, maka untuk sebarang
>
> x, $f'(x) = 0$

Untuk membuktikan kebenaran teorema A, akan dibuktikan dengan menggunakan definisi turunan sebagai berikut:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 =$
0………(terbukti)

Contoh

Tentukan turunan dari $f(x) = 10$

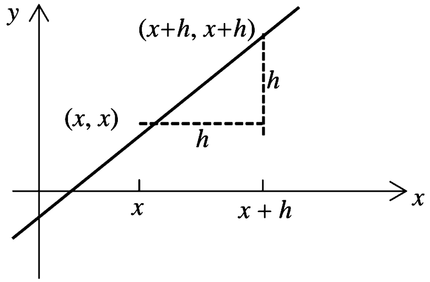
Penyelesaian

$f(x) = 10$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{10-10}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$

2. Turunan Fungsi Identitas

Grafik $f(x) = x$ (Gambar 4.4) merupakan sebuah garis yang melalui titik asal dengan kemiringannya adalah. Dari sini kita bisa berasumsi bahwa kemiringan dari funsi ini adalah 1 untuk semua x.



Gambar 4.4.

> *Teorema B*
>
> Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$

Bukti teorema B

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \text{ ......(Terbukti)}$$

3. Turunan fungsi pangkat

> *Teorema C*
>
> Jika $f(x) = x^n$, dengan n biangan bulat positif maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Untuk membuktikan kebenaran teorema B, akan dibuktikan dengan menggunakan definisi turunan sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(nx^{n-1} + + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$= \lim_{h \to 0} nx^{n-1}$$

Contoh

$f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^{5-1}$

$f'(x) = 5x^4$

$f(x) = x^7 \longrightarrow f'(x) = 7x^{7-1}$

$f'(x) = 7x^6$

C. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Proses menemukan turuna suatu fungsi langsung menggunakan definisi turunan terasa menjemukan dan akan memakan waktu yanng lama karena prosesnya yang panjang. Sifat-sifat turunan fungsi ini memperpendek proses yang panajang tersebut.

Misalkan $u = u(x), v = v(x)$, dan $u' = u'(x), v' = v'(x),$ maka berlaku sifat-sifat turunan sebagai berikut.

(i) $f(x) = u + v$ maka $f'(x) = u' + v'$

(ii) $f(x) = u - v$ maka $f'(x) = u' - v'$

(iii) $f(x) = u.v$ maka $f'(x) = u'v + uv'$

(iv) $f(x) = \frac{u}{v}$ maka $f'(x) = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

Mari kita buktikan kebenarn dari masing-masing sifat turunan fungsi di atas menggunakan definisi turunan fungsi.

Bukti sifat (i)
Misalkan $f(x) = u(x) + v(x)$, maka

$$f' = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h)-u(x)+v(x+h)]-v(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$
$$= u'(x) + v'(x)$$
$$= u' + v' \text{ .....(Terbukti)}$$

Contoh
Tentukan rumus turunan fungsi $f(x) = 2x^2 + 5x$
Penyelesaian
Misalkan $u = 2x^2 \longrightarrow u' = 4x$
$v = 5x \longrightarrow v' = 5$
$f(x) = u + v \longrightarrow f' = u' + v'$
$f(x) = 2x^2 + 5x \longrightarrow f'(x) = 4x + 5$

Bukti sifat (ii)
Misalkan $f(x) = u(x) - v(x)$, maka

$$f'(x) = u'(x) + (-1)v'(x)]$$
$$= u'(x) + (-1)v'(x)$$
$$= u'(x) - v'(x)$$
$$= u' - v' \text{ .....(Terbukti)}$$

Contoh
Cari turunan dari $f(x) = x^3 - 6$
Penyelesaian
Misalkan $u = x^3 \longrightarrow u' = 3x^2$
$v = 6 \longrightarrow v' = 0$
$f(x) = u - v \longrightarrow f'(x) = u' - v'$
$f(x) = x^3 - 6 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

Bukti sifat (iii)

Misalkan $f(x) = u(x).f(x)$, maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h).v(x+h)-u(x+h).v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x).\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0} u(x+h). \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x). \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$
$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$ .....(Terbukti)

Contoh

Carilah turunan dari $f(x) = (2x^2 - 5)(3x^4 - x)$

Penyelesaian

$f(x) = (2x^2 - 5)(3x^4 - x)$

Misal: $u = 2x^2 - 5$ $\quad u' = 2x$

$v = 3x^4 - x$ $\quad v' = 12x^3 - 1$

$$f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$
$$= (2x^2 - 5)(12x^3 - 1) + 2x(3x^4 - x)$$
$$= 24x^5 - 2x^2 - 60x^3 + 5 + 6x^5 - 2x^2$$
$$= 30x^5 - 60x^3 - 4x^2 + 5$$

D. Turunan Sinus dan Cosinus

Berikut adalah teorema penting pada turunan fungsi trigonometri yaitu turunan fungsi sinus dan cosinus.

> *Teorema E*
> Fungsi-fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos (x)$ keduanya dapat didiferensialkan, yaitu
> $D(\sin x) = \cos x$ dan $D(\cos x) = -\sin x$

Bukti Teorema E

$$D(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(-\sin x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right)$$
$$= (-\sin x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right]$$

Di sini akan membuktikan bahwa $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$ dan $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Jadi, D(sin x) = $(-\sin x).0 + (\cos x).1 = \cos x$

Sama halnya dengan

$$D(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(-\cos x \frac{1-\cos h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right)$$
$$= (-\cos x).0 - (\sin x).1$$
$$= -\sin x$$

Contoh

Cari $D(3 \sin x - 2 \cos x)$

Penyelesaian

$D(3 \sin x - 2 \cos x) = 3\, D(\sin x) - 2\, D(\cos x)$

$= 3 \cos x + 2 \sin x$

E. Aturan Rantai

Ketika kita menemukan fungsi pangkat semisal $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ maka sifat-sifat turunan tidak memungkinkan lagi menyelesaikan masalah ini karena kita harus mengalikan sebanyak 60 kali faktor-faktor kuadrat $2x^2 - 4x + 1$. Untungnya kita memiliki teorema aturan rantai yang dapat mempermudah menyelesaikan soal ini. Berikut disajikan teorema aturan rantai:

Teorema Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x))$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di x dan

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Yaitu

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$

Ilustrasi sederhana dari penggunaan aturan rantai dapat digambarkan sebagai berikut:

$$y = f(u) \text{ dan } u = g(x)$$

$$y' = \text{Turunan } f(u) \times \text{turunan } g(x)$$

Contoh

Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, carilah $D_x y$

Penyelesaian

Misalkan $u = 2x^2 - 4x + 1$, maka $y = u^{60}$,

$D_x y = D_u y \, D_x u$

$\quad = 60u^{59}(4x - 4)$

Substitusi $u = 2x^2 - 4x + 1$

Jadi, $D_x y = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}\,(4x - 4)$

Contoh

Hitunglah $y'(3)$ jika $y = \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^3$

Penyelesaian

Misalkan $u = \frac{x^2+1}{x+2}$, maka $y = u^3$

$y'(u) = 3u^2$ dan $u' = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$

$$y' = 3u^2\left(\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}\right)$$

Substitusi $u = \frac{x^2+1}{x+2}$,

$$y' = 3\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}\right)$$

$$y'(3) = 3\left(\frac{10}{5}\right)^2\left(\frac{20}{25^2}\right) = \frac{48}{5}$$

Aturan Rantai Bersusun

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(v)$ dan $v = h(x)$

Maka

$$D_x y = D_u y D_v u D_x v$$

Contoh:

Cari $D_x[sin^3(4x)]$

Penyelesaian

Misalkan $y = u^3$ dan $u = \sin v$, dan $v = 4x$

Maka :

$$D_x y = D_u y . D_v u . D_x v$$
$$= 3u^3 . \cos v . 4$$
$$= 3\, sin^2(4x) . \cos(4x) . 4$$
$$= 12 sin^2(4x) \cos(4x)$$

Dalam operasi aturan rantai ini, kita lakukan pencarian turunan dari yang paling kanan atau yang ada dalam kurung yang paling dalam terlebih dahulu, lalu ke kikiri sampai semuanya didapat tuurunannya.

F. Rangkuman

Berikut adalah rangkuman dari Bab IV dari buku ini:

1. Turunan (Derivatif) fungsi f didefinisikan sebagai
   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
2. Turunan fungsi konstanta $f(x) = k$, adalah $f'(x) = 0$
3. Turunan fungsi pangkat $f(x) = ax^n$, adalah $f'(x) = ax^{n-1}$

4. Turunan fungsi identitas $f(x) = x$, adalah $f'(x) = 1$
5. sifat-sifat turunan fungsi adalah sebaga berikut.
   $f(x) = u + v$ maka $f'(x) = u' + v'$
   $f(x) = u - v$ maka $f'(x) = u' - v'$
   $f(x) = u.v$ maka $f'(x) = u'v + uv'$
   $f(x) = \frac{u}{v}$ maka $f'(x) = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$
6. Turunan dari f(x) = sin x adalah $f'(x) = \cos x$ dan turunan dari f(x) = cos x adalah
   $f'(x) = -\sin x$
7. Aturan rantai dirumuskan sebagai $D_x y = D_u y\ D_x u$ dan aturan rantai bersusunnya
   dirumuskan sebagai $D_x y = D_u y D_v u D_x v$.

G. Latihan Soal

Untuk menguji kemampuan, kerjakanlah latihan soal-soal berikut inii.

1. Cari kemiringan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik-titik dengan $x = -2$; 1,5; 2,5
2. 17 Suatu kultur bakteri tertentu berkembang sehingga mempunyai massa sebesar $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gram setelah t jam.
   a. Berapakah banyaknya kultur ini berkembang selama selang $2 \leq t \leq 2{,}01$?
   b. Berapa laju perkembangan rata-rata selama selang $2 \leq t 2{,}01$?
   c. Berapa laju perkembangan pada $t = 2$?
3. Gunakan definisi $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ untuk mencari turunan berikut:
   a. $f'(3)$ jika $f(x) = x^2 - x$
   b. $f'(-1)$ jika $f(x) = x^3 + 2x^2$
4. Gunakan definisi $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk mencari turunan di x berikut:
   a. $f(x) = 5x - 4$

b. $f(x) = 8x^2 - 1$
c. $f(x) = ax^2 + bx + c$
d. $f(x) = x^3 - 2x$
e. $g(x) = \frac{3}{5x}$
f. $g(x) = \frac{6}{x^2+1}$
g. $g(x) = \frac{2x-1}{x-4}$

5. Diketahui f terdiferensialkan dan $f'(x) = m$. Tentukan $f'(-x_0)$bila:
   a. f adalah fungsi ganjil
   b. f adalah fungsi genap
6. Dengan menggunakan sifat-sifat turunan, cari turunan dari fungsi berikut:
   a. $y = 2x^3$
   b. $y = \pi x^2$
   c. $y = \sqrt{2}x^5$
   d. $y = -3x^{-3}$
   e. $y = \frac{3}{5x^5}$
   f. $y = -x^4 + 3x^2 - 6x + 1$
   g. $y = 3x(x^3 - 1)$
   h. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
   i. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$
   j. $y = \frac{2x-1}{x-1}$
   k. $y = \frac{2x^2-1}{3x+5}$
7. Jika f(0) = 4, $f'(0) = -1, g(0) = -3$ dan $g'(0) = 5$, cari:
   a. $(f.g)'(0)$
   b. $(f + g)'(0)$
   c. $(\frac{f}{g})'(0)$
8. Seekor lalat merayap dari kiri ke kanan di sepanjang puncak kurva $y = 7 - x^2$. Seekor laba-laba menungguunya pada titik (4,0). Tentukan jarak antara kedua serangga itu pada saat mereka pertama kali saling melihat.

9. Carilah $D_x y$ dari fungsi-fungsi berikut:
   a. $y = (2 - 9x)^{15}$
   b. $y = sin^3 x$
   c. $y = cos^5 x$
   d. $y = \left(\frac{x^2-1}{2x+5}\right)^6$
10. Guakan aturan rantai bersusun untuk mencari turunan berikut:
   a. $D_x[sin^4(x^2 + 3x)]$
   b. $D_x[sin^3(\cos t)]$

BAB V
PENGGUNAAN TURUNAN FUNGSI

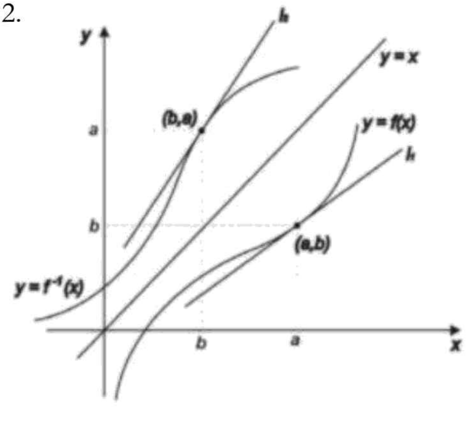
A. Turunan Fungsi Invers

Pada bagian ini akan di bahas tentang hubungan turunan suatu fungsi dengan inversnya, jika fungsi yang bersangkutan mempunyai invers. Pada bagian ini pembahasan hanya dibatasi pada fungsi kontinu yang monoton murni.

Teorema 4.1:

> Andaikan *f* terdeferensialkan dan monoton murni (monoton tegas) pada selang *I*. Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu *x* tertentu dalam *I*. Maka f^{-1} terdeferensiasikan di titik yang berpadanan *y* = *f(x)* dalam daerah hasil *f* dan
> $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Untuk lebih mudah memahami terorema. Perhatikan Gambar 2.



Kita anggap, $f^{-1}(x) = g(x)$.

Garis singgung fungsi *f(x)* di *a* adalah turunan pertama di *a* yaitu *f'(a)*. Garis singgung fungsi *g(x)* di *b* yaitu *g'(b)*

Gambar 4.1. Turunan *f* invers.

Menurut definisi invers. Jika *f(x)* = *y*, maka $f^{-1}(y) = x$. Dengan melakukan subtitusi kita akan dapatkan $f^{-1}(f(x)) = x$. Selanjutnya dilakukan diferensisasi, diperoleh :

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \frac{d}{dx} x$$

$$(f^{-1})'(f(x)).f'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Yang ekivalen dengan $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Bukti teorema

Andaikan *f* terdeferensiasikan dan monoton murni (monoton tegas) pada selang *I*. Jika $f'(x) \neq 0$ disuatu *x* tententu dalam *I*. Maka f^{-1} terdiferensiasikan di titik yang berpadanan *y* = *f(x)* dalam daerah hasil *f* dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Menurut definisi limit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Akan dibuktikan

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, dengan definisi limit diperoleh

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)}$$

Karena $f^{-1}(f(x)) = x$ dan $f^{-1}(f(a)) = a$, maka kita bisa menuliskan menjadi

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

Karena f kontinu dan monoton murni, sehingga $f(x) \neq f(a)$ sehingga $f(x)-f(a) \neq 0$. Sehingga bisa dilanjutkan dan dituliskan menjadi

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

dengan ini kita peroleh

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$$

Dimana $f(x) = y$, kita peroleh

$$\left(f^{-1}\right)'\left(y\right) = \frac{1}{f'(x)}$$, ***Terbukti***

Contoh 1 :

Carilah $\left(f^{-1}\right)'(6)$ jika diketahui $f(x) = \sqrt{7x+3}$

Jawab :

Kita akan mencari nilai x yang berpadanan dengan $y = 6$

$$f(x) = \sqrt{7x+3}$$

$$y = \sqrt{7x+3}$$

$$6 = \sqrt{7x+3}$$

$$36 = 7x+3 \leftrightarrow 7x = 36-3 = 33 \leftrightarrow x = \frac{33}{7}$$

Kemudian kita cari $f'(x)$

$$f(x) = \sqrt{7x+3}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x+3}}$$

$$f'(\frac{33}{7}) = \frac{7}{2\sqrt{7\left(\frac{33}{7}\right)+3}}$$

$$f'(\frac{33}{7}) = \frac{7}{2\sqrt{33+3}}$$

$$f'(\frac{33}{7}) = \frac{7}{2\sqrt{36}} = \frac{7}{2(6)} = \frac{7}{12}$$

Kita selesaikan menggunakan teorema $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{f'(\frac{33}{7})}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{\frac{7}{12}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{12}{7}$$

B. Turunan Fungsi Implisit

Misalkan sebuah fungsi dinyatakan dalam persamaan $y=f(x)$, maka fungsi ini selalu dapat dinyatakan dalam bentuk $F(x,y)=0$, dimana $F(x,y)= y - f(x)$ atau $F(x,y)=f(x) - y$. Sebaliknya, jika diberikan sebuah fungsi dalam bentuk $F(x,y)=0$, dengan diketahui y fungsi dari x, ternyata tidak selalu dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$. Perhatikan ilustrasi berikut :

a. $y = f(x)=2x^3 - x + 3$
b. $F(x,y)=x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 4xy^2 - y$

Tampak bahwa bentuk (a) dapat dinyatakan dalam bentuk $F(x,y)= 0$ yaitu $F(x,y)= 2x^3 - x + 3 - y=0$. Sedangkan bentuk (b) tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $y = f(x)$ secara eksplisit.

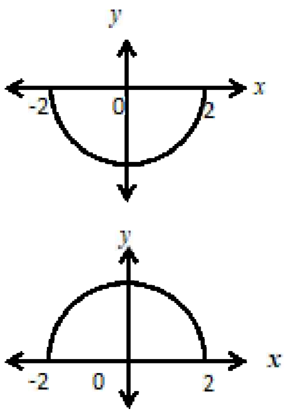
Fungsi yang dapat dinyatakan sebagai $y = f(x)$ disebut *"fungsi eksplisit"* dan fungsi yang terkandung dalam bentuk $F(x,y)= 0$ disebut *"fungsi implisit"*. Setiap bentuk fungsi eksplisit merupakan bagian dari fungsi implisit, tetapi tidak sebaliknya. Secara geometri, grafik fungsi eksplisit merupakan bagian dari grafik fungsi implisitnya.

Perhatikan persamaan $x^2+y^2 = 4$ yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di O dan berjari-jari 2. Bentuk persamaan $x^2 + y^2 = 4$ dapat dinyatakan dalam beberapa bentuk eksplisit dengan batasan-batasan tertentu; yaitu

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}\,;x\in[-2,2]$$

Atau

$$g(x)=-\sqrt{4-x^2}\,;x\in[-2,2]$$



Gambar 4.2. grafik *f(x)* dan g(x)

Persamaan bentuk $x^2+y^2=4$ jika dan hanya jika $x^2+y^2-4=0$ *adalah bentuk fungsi dari* $F(x,y) =0$, dimana $F(x,y)= x^2+y^2-4$

Dari gambar 4.2, mudah ditunjukkan bahwa *f* dan *g* kontinu pada selang [-2,2] dan dapat diturunkan pada selang [-2,2].

Perhatikan persamaan $4x^2y - 3y - x^3+1=0$ ini mendefinisikan secara implisit banyaknya fungsi dari *x*, akan tetapi kita tidak mungkin menyatakan *y* dengan *x* atau $y =f(x)$. Selanjutnya kita pusatkan perhatian bagaimana menentukan turunan fungsi dalam bentuk implisit.

Contoh 2:

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit berikut :

a. $x^2 + y^2 = 4$

b. $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

c. $y^3 \sin(x^2) = y^2 - xy$

Jawab :

a. $x^2 + y^2 = 4$, *cara 1* setiap suku pada tiap ruas diturunkan terhadap *x*, yaitu :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}; y \neq 0$$

Cara 2, kita tentukan dahulu fungsinya dalam bentuk eksplisit, kemudian kita turunkan. Dalam hal ini kita memiliki:

$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ atau $y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

Sehingga :

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \qquad g'(x) = -\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad g'(x) = -\left(\frac{x}{-\sqrt{4 - x^2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-x}{y} \qquad g'(x) = \frac{-x}{y}$$

Karena $y = \sqrt{4 - x^2}$ Karena $y = -\sqrt{4 - x^2}$

b. Dengan menggunakan cara 1, yaitu menurunkan setiap suku pada tiap ruas. Setelah memakai aturan hasil kali pada suku pertama, diperoleh :

$$4x^2\frac{dy}{dx}+y.8x-3\frac{dy}{dx}=3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4x^2-3\right)=3x^2-8xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8xy}{4x^2-3}$$

c. $y^3\sin(x^2)=y^2-xy\,,\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(y+2xy^3\cos(x^2)\right)}{3y^2\sin(x^2)-2y+x}$

(Tunjukkan)

C. Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendeferensialan dengan mengambil sebuah fungsi *f* dan menghasilkan fungsi baru *f'*. Jika *f* ' sekarang dideferensialkan, masih menghasilkan fungsi lain, dinyatakan oleh *f* " (baca "*f dua aksen* ") dan disebut turunan kedua dari *f* dan seterusnya jika diturunkan lagi menghasilkan *f'''*, yang disebut dengan turunan ketiga dan seterusnya. (Purcell & Varberg, 1987)

Sebagai contoh, andaikan

$$f(x)=x^4+4x^3-2x^2+x+2$$

Maka

$$f'(x)=4x^3+12x^2-4x+1$$

$$f''(x)=12x^2+24x-4$$

$$f'''(x)=24x+24$$

$$f''''(x)=24$$

$$f^{(5)}(x)=0$$

Berdasarkan contoh di atas terlihat bahwa semua turunan tingkat tinggi yang lebih tinggi akan menghasilkan nol.

Selanjutnya akan diperkenalkan cara menulis notasi turunan pertama dari $y=f(x)$, yaitu :

$$f'(x) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

Masing-masing disebut sebagai *notasi aksen*, *notasi d*, dan *notasi Leibniz*. Perhatikan cara penulisan (notasi) untuk turunan dari $y = f(x)$.

Turunan	Notasi		
	Aksen	D	Leibniz
Pertama	$f'(x)$	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
Keempat	$f''''(x)$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
Kelima	$f^{(5)}(x)$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5 y}{dx^5}$
Keenam	$f^{(6)}(x)$	$D_x^6 y$	$\frac{d^6 y}{dx^6}$
⋮	⋮	⋮	⋮
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

Contoh 1 :

Diketahui $y = \sin 4x$. Tentukan $\frac{d^4 y}{dx^4}$; $\frac{d^6 y}{dx^6}$ dan $\frac{d^{14} y}{dx^{14}}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos 4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4^2 \sin 4x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4^3 \cos 4x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4^4 \sin 4x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 4^5 \cos 4x$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = -4^6 \sin 4x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{14}y}{dx^{14}} = -4^{14} \sin 4x$$

Kecepatan dan percepatan

Untuk memahami pengertian kecepatan dalam pembahasan ini, diberikan contoh dalam memahaminya.

Contoh 2:

Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisi *s*-nya memenuhi persamaan, $s = 3t^2 - 10t + 6$, dengan *s* diukur dalam sentimeter dan *t* dalam detik. Tentukan kecepatan benda bilamana *t* =2 dan *t* =6. Kapan kecepatannya 0? Kapan kecepatannya positif?

Jawab :

Jika kita memakai lambang *v(t)* untuk kecepatan pada saat *t*, maka diperoleh :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 10$$

Jadi

$$v(2) = \frac{ds}{dt} = 6.2 - 10 = 12 - 10 = 2 \text{ cm/detik}$$

$$v(6) = \frac{ds}{dt} = 6.6 - 10 = 36 - 10 = 26 \text{ cm/detik}$$

Kecepatan benda adalah 0 ketika $6t - 10 = 0$, yaitu pada saat t = 5/3 detik. Kecepatan positif jika $6t - 10 > 0$ atau pada saat t > 5/3 detik.

Sekarang kita ingin memberikan tafsiran mengenai turunan kedua $\frac{d^2s}{dt^2}$ yang merupakan turunan pertama dari kecepatan. Jadi untuk mengukur laju perubahan kecepatan terhadap waktu dinamakan *percepatan* yang dinyatakan oleh *a*. Maka percepatan *a* ditulis menjadi

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Contoh 3:

Perhatikan soal contoh 2, $s = 3t^2 - 10t + 6$. Jadi,

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t - 10$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6$$

Ini artinya kecepatan akan bertambah dengan tingkat yang tetap sebesar 6 cm/detik setiap detik.

D. Turunan Fungsi Aljabar dan Fungsi Transenden

1. Turunan Fungsi Aljabar

Fungsi Real secara umum dibagi menjadi dua bagian, yaitu :

a. Fungsi aljabar (polinom, rasional, akar, harga mutlak)
b. Fungsi transenden, yaitu fungsi yang bukan fungsi aljabar seperti fungsi logaritma asli, fungsi trigonometri, fungsi eksponen, fungsi hiperbolik, dsb:

Pengertian dari turunan fungsi *y =f(x)*

a. Laju rata-rata perubahan fungsi dalam interval antara x=a dan x = a + h adalah :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ dengan syarat : *a* di dalam domain *f(x)*

b. Laju sesaat perubahan *f(x)* pada *x* = *a* atau limit dari laju rata-rata perubahan fungsi antara *x* = *a* dan *x* = *a* + *h* saat *h* mendekati 0 adalah :

$$\lim_{h\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ disebut dengan turunan *f(x)* pada *x=a*

Sehingga turunan fungsi *f(x)* pada sembarang titik *x* adalah:

$$\lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

c. Sebuah fungsi dikatakan dapat didiferensiasikan) pada *x=a* jika turunan fungsi itu ada (terdefinisi) pada titik tersebut.

Contoh:

Dengan menggunakan definisi turunan, tentukan turunan dari fungsi *f(x)=2x.*

Jawab :

$$f'(x) = \lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to o}\frac{2(x+h)-2x}{h} = \lim_{h\to o}\frac{2x+2h-2x}{h} = \lim_{h\to o}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to o} 2 = 2$$

Aturan-aturan dari turunan (turunan rumus-rumus)

Jika U dan V adalah fungsi dalam x, sedangkan k dan n adalah konstanta, maka turunan dapat didefinisikan sebagai berikut :

1. $y = f(x) = k \to f'(x) = 0$
2. $y = f(x) = kx \to f'(x) = k$
3. $y = f(x) = x^n \to f'(x) = n.x^{n-1}$

4. $y = f(x) = kx^n \rightarrow f'(x) = knx^{n-1}$

5. $y = f(x) = U \pm V \rightarrow f'(x) = U' \pm V'$

6. $y = f(x) = U^n \rightarrow f'(x) = n.U^{n-1}.U'$

7. $y = f(x) = \sqrt{U} \rightarrow f'(x) = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

8. $y = f(x) = \dfrac{U}{V} \rightarrow f'(x) = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$ dengan syarat $V \neq 0$

Contoh:

Tentukan $f'(x)$ dari fungsi f di bawah ini :

a. $f(x) = (3x - x^2 + 1)^5$

b. $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

c. $f(x) = \dfrac{2x-5}{2x^2+1}$

d. $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

Jawab :

a. $f(x) = (3x - x^2 + 1)^5$

$f(x) = U^n \rightarrow f'(x) = n.U^n U'$

Misal : $U = 3x - x^2 + 1 \rightarrow U' = 3 - 2x$

$f(x) = U^n = (3x - x^2 + 1)^5 \rightarrow f'(x) = n.U^{n-1}U'$

$f'(x) = 5(3x - x^2 + 1)^{5-1}.(3 - 2x) = (15 - 10x)(3x - x2 + 1)^4$

b. $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Jawab :

$f(x) = U.V \rightarrow f'(x) = U'V + UV'$

Misal :

$U = x - 1 \rightarrow U' = 1$

$$V=\sqrt{x^2-2x+2} \to V'=\frac{(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

Jadi,

$$f'(x)=(1)\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)+(x-1)\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x+2)+(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x^2-2x+2+x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x+2+x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

c. $f(x)=\dfrac{2x-5}{2x^2+1}$

Jawab :

$$f(x)=\frac{U}{V} \to f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

Misal :

$U=2x-5 \to U'=2$

$V=2x^2+1 \to V'=4x$

Jadi

$$f'(x)=\frac{(2)(2x^2+1)-(2x-5)(4x)}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+2-8x^2+20x}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+20x+2}{(2x^2+1)^2}$$

d. $f(x)=\sqrt{2x}+2\sqrt{x}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}} + \frac{1}{2.2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

2. **Turunan Fungsi Transenden**
   a. **Fungsi logaritma Asli**
   Definisi
   Fungsi logaritma asli dinotasikan dengan $f(x) = \log_e x = \ln x,$ didefinisikan oleh :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{dt}, x > 0$$

   b. **Turunan fungsi logaritma asli**

$$D_x \ln x = D_x \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

Misal $u = g(x)$

$$D_x \ln u = D_u \ln u D_x u = \frac{1}{u} D_x u$$

Contoh :
Tentukan turunan di bawah ini:

1. $D_x \ln \sqrt{x}$
2. $D_x \ln (x^2 + 1)^2$

Jawab :

1. Misalkan u = $\sqrt{x} \Leftrightarrow D_x u = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$D_x \ln \sqrt{x} = D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u = \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

2. Misalkan $u = (x^2+1)^2 \Leftrightarrow D_x u = 2.2x(x^2+1)$

$$D_x \ln(x^2+1)^2 = D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^2} .4x(x^2+1) = \frac{4x}{(x^2+1)}$$

c. Fungsi Eksponen

Definisi

Eksponen dari x ditulis e^x didefinisikan oleh

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x$$

Sifat-sifat fungsi eksponen

1. $e^{a+b} = e^a . e^b$
2. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Turunan fungsi eksponen

$$D_x e^x = e^x$$

Misal $u = g(x)$

$$D_x e^u = D_x e^u . D_x u = e^u D_x u$$

$$y = e^x$$

$$\ln y = \ln e^x$$

$$\ln y = x \ln e$$

$$\ln y = x$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

Contoh :

Carilah $D_x e^{\sqrt{3x+1}}$

Jawab :

Misal : $u = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow D_x u = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$$D_x e^{\sqrt{3x+1}} = e^u D_x u = e^{\sqrt{3x+1}} . \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3e^{\sqrt{3x+1}}}{2\sqrt{3x+1}}$$

d. Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik dikonstruksikan dengan gagasan mengganti lingkaran satuan oleh hiperbol satuan (Karim, 2013). Jika titik *P(s,t)* terletak pada hiperbol u^2-v^2=*1*, kita akan mendefinisikan *cosh x = u* dan *sinh x= t*, dimana *cosh* dan *sinh* menyatakan kosinus dan sinus hiperbolik. *Cosh* dan *sinh* adalah kombinasi dari fungsi eksponen natural, yaitu :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ dan } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Definisi fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai berikut.

1) Fungsi kosinus hiperbolik:

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \Re$$

2) Fungsi sinus hiperbolik:

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \Re$$

3) Fungsi tangen hiperbolik:

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, x \in \Re$$

4) Fungsi kotangen hiperbolik:

$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, x \in \Re$$

5) Fungsi secan hiperbolik:

$$f(x) = \sec hx = \frac{1}{\cosh x}, x \in \Re$$

6) Fungsi kosekan hiperbolik:

$$f(x) = \csc h\, x = \frac{1}{\sinh x}, x \neq 0$$

Turunan fungsi hiperbolik

Turunan fungsi kosinus dan sinus hiperbolik diperoleh dari bentuk eksponennya, sedangkan turunan hiperbolik lainnya diperoleh berdasarkan aturan menentukan turunan. Hasilnya diberikan dalam teorema berikut :

a. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

b. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

c. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$

d. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\csc h^2 x$

e. $\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx.\tanh x$

f. $\frac{d}{dx}(\csc hx) = -\csc hx.\coth x$

E. Turunan Fungsi Parameter

Definisi :

Misalkan *f* dan *g* masing-masing adalah fungsi yang terdefinisi pada daerah asalnya $D \subseteq \Re$, maka :

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)\,; t \in D$$

Menyatakan suatu "persamaan fungsi parameter" dengan *t* sebagai parameter, dan grafiknya adalah himpunan titik-titik di $\Re^2$ yaitu $\{(x, y) | x = f(t); y = g(t); t \in D\}$

(Tim Dosen Unhas, 2005, hal. 179).

Perhatikan fungsi parameter

$$x = f(t) = \cos t$$
$$y = g(t) = 2\cos t + \sin^2 t - 1$$

Jika parameter *t* dieliminasi dari kedua persamaan tersebut diperoleh persamaan fungsi *y=H(x)* dengan *x= f(t)* sebab

$$y = 2\cos t + \sin^2 t - 1 = 2\cos t + 1 - \cos^2 t - 1\,,$$

sehingga $y = 2x - x^2 \;; x = \cos t$

Persamaan terakhir ini dapat ditulis dalam bentuk eskplisit :

$y - 2x + x^2 = 0$ maka *G(x,y)=0*

Jadi jika diberikan fungsi parameter dengan persamaan

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t); t \in D \end{cases}$$

Kita dapat menyatakan dalam bentuk sederhana sebagai :

$y = H(x)$ dengan *x = f(t)*. Dengan menggunakan aturan rantai diperoleh :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}; \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Yang merupakan turunan fungsi parameter.

Teorema 4.2

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $t \in D \subseteq \Re$, masing-masing fungsi yang mempunyai turunan terhadap peubah t dengan $\frac{dx}{dt} \neq 0$ dan menyatakan suatu persamaan fungsi parameter yang dinyatakan dalam bentuk $y = H(x)$ atau $G(x,y)=0$, maka turunan y terhadap x adalah :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Contoh :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi parameter berikut :

a. $x = t;\, y = 3t - t^4,\ t \in \Re$

b. $x = 10\cos 3t;\, y = -10\sin 3t,\ 0 < t < \pi$

c. $x = e^{3\theta};\, y = e^{6\theta} - 3e^{2\theta} + 1;\ 0 \in \Re$

Jawab :

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3 - 4t^3}{1} = 3 - 4t^3 = 3 - 4x^3$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-10.3\cos 3t}{-10.3\sin 3t} = \frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \frac{x/10}{-\frac{y}{10}} = -\frac{x}{y}$

c. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6e^{6\theta} - 3.2e^{2\theta}}{3e^{3\theta}} = \frac{6e^{2\theta}\left(e^{4\theta} - 1\right)}{3e^{3\theta}} = \frac{2\left(e^{4\theta} - 1\right)}{e}$

$= \frac{2\left(e^{4\theta} - 1\right)}{e} = 2e^{3\theta} - \frac{2}{e} = 2x - \frac{2}{e}$

BAB VI
INTEGRAL

A. Rumus Dasar

1. Integral Tak Tentu

Rumus dasar pada Integral berkaitan erat pada rumus turunan yang telah dijeaskan pada bab sebelumnya. Keterkaitan tersebut dikarenakan hasil penurunan suatu fungsi terhadap peubah dapat "dibalik" sehingga diperoleh hasil pengintegralannya, maka dari itu integral sering diistilahkan dengan "anti turunan".

> **Definisi** Integral Tak Tentu
> Kita sebut F suatu anti turunan dari f pada selang I jika $DF = f$ pada I – yakni, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I. (Jika x suatu titik ujung dari I, $F'(x)$ hanya perlu berupa turunan satu sisi)
> (Edwin J.Purcell and Dale Varberg, 1987)

Integral disebut juga anti turunan, pada integral dibagi atas dua bagian yaitu integral tak tentu.

Pada materi turunan/diferensial telah kita pelajari bahwa jika diketahui rumus fungsi $f(x) = x^n + C$ dimana C adalah konstanta, maka turunannya adalah $f'(x) = nx^{n-1}$. Operasi untuk mendapatkan kembali fungsi $f(x)$ jika diketahui $f'(x)$ dinamakan operasi integral, dilambangkan dengan "$\int$ ". Dengan demikian $\int nx^{n-1}\, dx = x^n + C$. Dari pengertian integral yang merupakan anti turunan, maka untuk membuktikan bahwa $\int f(x)dx = F(x) + C$, cukup dibuktikan bahwa $D_x[F(x) + C] = f(x)$ dimana D_x adalah operator turunan.

> **Teorema 6.1** Aturan Pangkat
> Jika n adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka
> $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + C$$
> (Edwin J.Purcell and Dale Varberg, 1987)

Bukti: pembuktian teori ini dengan cara menyamakan turunan antara ruas kiri dan ruas kanan, yaitu sebagai berikut

$$D_x\left[\frac{x^{n-1}}{n+1}+C\right]=\frac{1}{n+1}(n+1)x^n+0=\ x^n\ (terbukti)$$

Contoh 1 Hitunglah integral dari $f\ (x) = 5\ dx$.

Penyelesaian $\int 5\ dx \ = 5\ \int x^0\ dx$

$$= 5\ \frac{x^{0+1}}{0+1}+C$$

$$= 5x + C$$

Contoh 2 Hitunglah integral dari $f\ (x) = x^7\ dx$.

Penyelesaian $\int x^7\ dx \ = \frac{1}{7+1}\ x^{7+1} + C$

$$= \frac{x^7}{8}+C$$

Contoh 3 Hitunglah integral dari $f\ (x) = x^{4/3}\ dx$.

Penyelesaian $\int x^{4/3}\ dx \ = \frac{1}{\frac{4}{3}+1}\ x^{\frac{4}{3}+1} + C$

$$= \frac{x^{7/3}}{7/3}+C$$

$$= \frac{3}{7}x^{7/3}+C$$

Contoh 4 Hitunglah integral dari $f\ (x) = \sqrt{x}\ dx$.

Penyelesaian $\int \sqrt{x}\, dx \ = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}+C$$

Contoh 5 Hitunglah integral dari $f\ (x) = \sqrt[3]{x}\ dx$.

Penyelesaian $\int \sqrt[3]{x}\ dx \ = \int x^{\frac{1}{3}}\ dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

Integral tak tentu mempuyai sifat-sifat yang dapat didasarkan pada sifat-sifat turunan. Berikut ini adalah teorema-teorema yang menyatakan sifat-sifat integral tak tentu.

Teorema 6.2

$\int kf(x)dx = k\ \int f(x)\ dx$, dengan k suatu konstanta

(Lumbantoruan, 2019)

Bukti

$$D_x[k \int f(x)dx] = k\ D_x[\int f(x)\ dx]$$
$$= k\ f(x)$$

Contoh 6 Hitunglah integral dari $f\ (x) = 7x^4dx$.

Penyelesaian $\int 7x^4\ dx \ = 7 \int x^4\ dx = 7\frac{1}{4+1}x^{4+1} + C$

$$= \frac{7}{5}x^5 + C$$

Teorema 6.3

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)\ dx$$

(Lumbantoruan, 2019)

Bukti:

$$D_x\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = D_x \int f(x)dx + D_x \int g(x)dx$$
$$= f(x) + g\ (x)$$

Contoh 7 Hitunglah integral dari

$$f\ (x) = [(3x^2 + 2) + (8x^3 + 4)]dx.$$

Penyelesaian

$$\int[(3x^2 + 2) + (8x^3 + 4)]dx\ = \int(3x^2 + 2)dx + \int(8x^3 + 4)dx$$
$$= \left(\frac{3}{2+1}x^{2+1} + 2x +\ C_1\right) +\ \left(\frac{8}{3+1}x^{3+1} + 4x +\ C_2\right)$$
$$= (x^3 + 2x) + (2x^4 + 4x) + C_1 + C_2$$
$$= 2x^4 + x^3 + 6x + C$$

Teorema 6.4

$$\int [f(x) - g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$$

(Lumbantoruan, 2019)

Bukti:

$$D_x\left[\int f(x)dx - \int g(x)dx\right] = D_x\int f(x)dx - D_x\int g(x)dx$$

Contoh 8 Hitunglah integral dari

$$\int[(11x^7 + 9) - (7x^5 - 9)]dx$$

Penyelesaian

$$\int[(11x^7 + 9) - (7x^5 - 9)]dx$$
$$= \int(11x^7 + 9)dx - \int(7x^5 - 9)dx$$
$$= \left(\frac{11}{7+1}x^{7+1} + 9x +\ C_1\right) - \left(\frac{7}{5+1}x^{5+1} - 9x + C_2\right)$$
$$= \left(\frac{11}{8}x^8 + 9x\right) - \left(\frac{7}{6}x^6 - 9x\right) +\ C_1 - C_2$$
$$= \frac{11}{8}x^8 - \frac{7}{6}x^6 + 18x + C$$

Ingat kembali pada Aturan Rantai yang diterapkan pada pangkat suatu fungsi. Jika $u = (x)$ adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan *r* suatu bilangan rasional ($r \neq$ -1), maka

$$D_x \left[\frac{u^{r+1}}{r+1}\right] = u^r . D_x u$$

Atau, dalam cara penulisan fungsional,

$$D_x \left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1}\right) = [g(x)]^r . g'(x)$$

Dari sini kita peroleh suatu aturan penting untuk integral tak tentu.

Teorema 6.5 Aturan Pangkat Yang Diperumum

Andaikan *g* suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan *r* suatu bilangan rasional yang bukan -1. Maka

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

(Lumbantoruan, 2019)

Contoh 9 Hitunglah integral dari

$$\int (x^8 + 12x)^{28} (8x^7 + 12) dx$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int (x^8 + 12x)^{28} (8x^7 + 12) dx &= \int [(g(x)]^{28} g'(x) dx \\ &= \frac{[g(x)]^{29}}{29} + C \\ &= \frac{(x^8+12)^{29}}{29} + C \end{aligned}$$

2. Integral Tentu

Pada integral tentu definisi integral didasarkan pada luas daerah dengan menggunakan rumus *Jumlah Riemann.* Sesuai namanya, definisi tersebut diperkenalkan secara modern oleh Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), walaupun sebelumnya telah didefinisikan oleh Newton dan Leibniz.

Definisi Integral Tentu

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

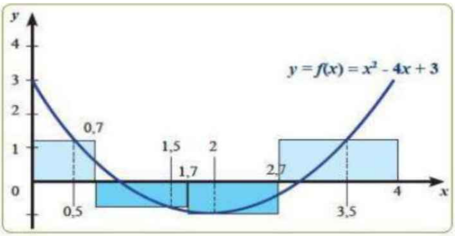
ada, kita katakana f adalah **terintegrasikan** pada [a,b]. lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut **Integral tentu** (integral Riemann) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

(Dale Varberg, Edwin J. Purcell, 2008)

Nilai dari $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i n$ disebut *Jumlah Riemann* adalah titik wakil pada interval ke-i dan Δx_i lebar interval ke-i dan n banyak subinterval (banyaknya persegi panjang yang terbentuk) dari wakil (x_i) kita peroleh dengan tiga cara yaitu titik ujung kiri subinterval, titik tengah subinterval, dan titik ujung kanan subinterval dimana setiap jenis titik wakil memberikan hasil yang berbeda.

Contoh 10 Tentukan jumlah Riemann dari fungsi yang diperlihatkan gambar berikut:



Penyelesaian:

Menentukan luas persegi panjang:

Persegi panjang 1 : panjang = 0,7, titik wakil $x_1 = 0,5$
Sehingga lebar = $f(x_{1=}f\ (0,5) = (0,5)^2 - 4(0,5) + 3 = 1,25$
Luas $L_1 = p \times l$ = 0,7 × 1,25 = 0,875

Luas panjang 2 : panjang= 1,7 – 0,7 = 1, titik wakil $x_2 = 1,5$
Sehingga lebar = $f(x_2) = f(1,5) = (1,5)^2 - 4(1,5) + 3 = -0,75 = 0,75$
Luas: $L_2 = p \times l = 1 \times$ 0,75 = 0,75

Persegi panjang 3 : panjang = 2,7 – 1,7 = 1, titik wakil $x_3 = 2$
Sehingga lebar $f(x_3) = f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1 = 1$
Luas $L_3 = p \times l = 1 \times 1 = 1$

Persegi panjang 4 : panjang = 4 – 2,7 = 1,3, titik wakil $x_4 = 3,5$
Sehingga lebar $f(x_4) = f(3,5) = (3,5)^2 - 4(3,5) + 3 = 1,25$
Luas $L_4 = p \times l = 1,3 \times 1,25 = 1,625$

Menentukan jumlah Riemann nya:
Jumlah Riemann =L1+L2+L3+L4= 0,875 + 0,75+1+1,625 ,
Maka Riemannya adalah 4,25.

B. Integral Subtitusi

Integral subtitusi merupakan teknik integrasi dengan cara memisalkan suatu fungsi menjadi bentuk yang lebih sederhana. Pemisalan dilakukan untuk menyederhanakan fungsi yang rumit. Berikut teorema teknik integrasi subtitusi pada integral tak tentu dan tertentu.

Teorema 6.7 Aturan Subtitusi untuk Integral Tak-tentu

Misalkan g fungsi terdeferensialkan dan misalkan bahwa F adalah anti-turunan f, maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

(Dale Varberg, Edwin J. Purcell, 2008)

Bukti:

$$D_x[F(g(x)) + C] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Secara normal kita terapkan Teorema 6.7 sebagai berikut. Dalam integral seperti $\int f(g(x))g'(x)dx$ kita misalkan $u = g(x)$, sehingga $\frac{du}{dx} = g'$. Jadi $du = g'(x)dx$. Maka integral menjadi

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Jadi, jika kita dapat mencari anti-turunan untuk $f(x)$, kita dapat menghitung $\int f(g(x))g'(x)dx$. Penerapan metode ini tergantung kemahiran dalam menemukan pemisalan dalam menentukan tururan.

Contoh 10 Hitunglah $\int x^2\sqrt{x^4 + 11}\, dx$

Penyelesaian:

Subtitusikan $u = x^4 + 11$

$$\int x^3\sqrt{x^4 + 11}\, dx = \frac{1}{4}\int (x^4 + 11)^{\frac{1}{2}}(4x^3dx)$$
$$= \frac{1}{6}(x^4 + 11)^{3/2} + C$$

Contoh 11 Hitunglah $\int \sqrt{x^2 + x}\,(2x + 1)\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + x$; maka $du = (2x + 1)dx$. Sehingga

$$\int \sqrt{x^2 + x}\,(2x + 1)dx = \int u^{1/2}du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C$$

Contoh 12 Hitunglah $\int cos^5 x\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin x\, dx\,; du = \cos x\, dx$

$$\int cos^5 x\, dx = \int cos^4 x \cdot \cos x\, dx$$
$$= \int (1 - sin^2 x)^2 du$$
$$= \int (1 - u^2)^2 du$$
$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) du$$
$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + k$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}sin^3 x + \frac{1}{5}sin^5 x + k$$

C. Integral Parsial

Metode integrasi parsial umumnya digunakan bila integral memuat bentuk fungsi-fungsi *transendental* antara lain ln x, arc tan x, …dan sebagainya memuat hasil ganda fungsi dengan bentuk seperti $e^x sin\, x, x^n e^x$dan sebagainya.

Dimulai dengan aturan hasil kali:

$$\frac{d}{dx}\big(u(x)v(x)\big) = \frac{du(x)}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv(x)}{dx}$$

dapat ditulis dalam bentuk differensial menjadi

$$d[(u(x)v(x))] = \left[v(x)\frac{du(x)}{dx} + u(x)\frac{dv(x)}{dx}\right]dx$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan untuk memperoleh

$$\int d\big[\big(u(x)v(x)\big)\big] = \int v(x)\frac{du(x)}{dx}dx + \int u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx$$

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Bentuk baku dari rumus integrasi parsial dituliskan sebagai

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Atau disingkat menjadi

$$\int u(x)dv = uv - \int v\,du$$

(Cipta, 2020)

Contoh 13 Hitunglah $\int x \sin x \, dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = x \leftrightarrow du = dx$

$$dv = sin\,x\,dx = -d(\cos x) \leftrightarrow v = \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

Sehingga

$$\int x \sin x\,dx = \int -x\,d(\cos x)dx$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Contoh 14 Hitunglah $\int \ln x\,dx$

Penyelesaian

Misalkan $u = ln\,x \leftrightarrow du = \frac{dx}{x}$;

$$dv = dx \leftrightarrow v = x$$

Sehingga

$$\int \ln x\,dx = (\ln x)(x) - \int x\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

(Muhammad Faizal Amir, 2016)

D. Integral Arcus Tangen dan Logaritma

Ingat bahwa $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + C$

Berdasarkan rumus di atas dapat dibuktikan bahwa untuk konstanta $a \neq 0$, maka berlaku

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} arc\tan\frac{x}{a} + C}$$

Perhatikan penyebut dalam integran.
Selanjutnya akan dicari $\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx$
Jika $f(x) = x^2 + 2bx + c$ dengan $D = 4b^2 - 4c < 0$, maka $f(x)$ **definit positif** dan selalu dapat dibawa ke bentuk

$$f(x) = (x+b)^2 + p^2$$

dengan $p^2 = c - b^2 > 0$
sehingga $\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}dx$ dan dengan menggunakan rumus di atas diperoleh

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+2bx+c}dx = \frac{1}{p}\arctan\frac{x+b}{p} + C}$$

Dengan $p = \sqrt{c - b^2}$

(Bagio, 2010)

Contoh 14 Hitunglah $\int \frac{1}{3+x^2}dx$
Penyelesaian
Dengan menggunakan rumus diperoleh

$$\int \frac{1}{3+x^2}dx = \frac{1}{3} arc\tan\frac{x}{3} + C$$

Contoh 15 Hitunglah $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$
Penyelesaian
Diketahui $b = 1, c = 5, p = \sqrt{5 - 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Dengan menggunakan rumus diperoleh

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2}\, arc \tan \frac{x+1}{2} + C$$

BAB VII
INTEGRAL FUNGSI PECAH RASIONAL

A. Pengertian Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi yang berbentuk pecahan dimana pembilang dan penyebutnya masing-masing merupakan fungsi polinomial. Fungsi rasional yang dimaksud di sini adalah fungsi-fungsi yang berbentuk $\frac{p(x)}{q(x)}$, dengan p (x) dan q (x) masing-masing fungsi polinomial berderajat m dan n dimana m < n (Opan, 2013). secara umum, fungsi polinomial p (x) berderajat m dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ ... + p_mx^m$$
$$p_m \ \neq 0$$

Suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinom. (Susila, 2001). Menurut (Yahya, 2010) dan (Wardiman, 1987) fungsi pecahan rasional adalah suatu fungsi $\boldsymbol{F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$ di mana f(x) dan g(x) polinom (suku banyak). Jika derajat dari f(x) lebih kecil dari pada derajat g(x), maka F (x) disebut fungsi pecahan rasional yang sebenarnya (*proper*) di dalam hal lain disebut fungsi pecahan rasional tidak sebenarnya (*improper*). Suatu fungsi pecahan rasional tidak sebenarnya selalu dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu polinom dan suatu fungsi yang sebenarnya dengan melakukan operasi pembagian biasa. Sedangkan menurut (Suhartono, 2015) Fungsi pecah rasional adalah fungsi berbentuk $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan N(x) dan D(x) polinomial-polynomial.

Teknik pengintegralan fungsi rasional didasarkan pada penguraian bentuk $\frac{p(x)}{q(x)}$ menjadi bentuk yang lebih sederhana agar mudah untuk diintegralkan berdasarkan faktor dari polinomial q (x).

Perhatikan contoh berikut ini

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}dx =$$
$$\int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x-2}dx$$

A dan B dapat dicari dengan menggunakan konsep kesamaan polinom berikut ini.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Berdasarkan konsep kesamaan polinom jika ruas kiri sama dengan ruas kanan maka suku-suku sejenisnya adalah sama. Pada kasus ini kita melihat koefisisen x dan konstanta pada pembilang.

$$2x+1 = A(x-2) + B(x-1)$$
$$2x+1 = (A+B)x - 2A - B$$
$$(A+B) = 2 \; dan \; -2A - B = 1$$

Dengan menggunakan penyelesaian sistem persamaan linear diperoleh nilai A dan B sebagai berikut:

$$A = -3 \; dan \; B = 5$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-2}dx$$

Pakailah teknik pengintegralan subtitusi untuk menyelesaikan integral di atas.

Misal u = x – 1 sehingga du = dx
Misal v = x – 2 sehingga dv = dx

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-3}{u}du + \int \frac{5}{v}dv$$
$$= -3\ln(u) + 5\ln\ (v) + C$$

$$= -3\ln(x-1) + 5\ln\ (x-2) + C$$
$$= \ln\frac{(x-2)^5}{(x-1)^3} + C$$

B. Keadaan N (x) = D' (x)

Jika N (x) = D' (x) maka dapat diseleseikan dengan rumus:

$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = Ln\ |D(x)| + C$ (Suhartono, 2015)

Contoh 1 :

Carilah $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx = Ln\ |x^2+2x+4| + C$$

Contoh 2 :

Carilah $\int \frac{2x+4}{x^2+2x+4} dx$

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8} dx = Ln\ |x^2-4x+8| + C$$

Contoh 3 :

Carilah $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+6x+13} dx = Ln\ |x^2+6x+13| + C$$

C. Keadaan Derajat N(x) ≥ derajat D(x)

Lakukan pembagian N(x) oleh D(x) sehingga diperoleh bentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ dengan derajat R(x) derajat D(x), Q(x) adalah polinom, sehingga integralnya sangat mudah. (Suhartono, 2015)

Contoh 1

Carilah nilai dari $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Penyelesaian:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\int x\,dx - \int \frac{\frac{1}{2}2x}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,Ln\,|x^2+1| + C$$

D. Keadaan Derajat N (x) < derajat D (x)

Menurut (Suhartono, 2015) pada N(x) ≠ D'(x). diambil koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam D (x) adalah satu. Untuk menghitung $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$, terlebih dahulu integran dipisah menjadi pecahan-pecahan parsialnya. Cara memisah $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya :

1. Derajat N (x) < derajat D (x)
2. Koefisien suku pangkat tertingi dari x dalam D (x) adalah satu
3. N (x) dan D (x) tidak lagi mempunyai factor persekutuan

Menurut (Suhartono, 2015) keadaan faktor-faktor D(x), dalam memisahkan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya dapat dibedakan menjadi 4 (empat) keadaan, yaitu :

1. Semua faktor D(x) linear dan berlainan
   Misalnya faktor-faktor D(x) adalah x – a, x – b, x – c, dan x – d, maka D(x) = (x – a) (x – b) (x – c) (x – d). dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}$ sebagai suatu identitas dalam x, sehingga untuk setiap nilai x yang diberikan makan nilai ruas kiri

dan nilai ruas kanan dalam (1) sama. Konstanta A, B, C, dan D adalah konstanta-konstanta yang masih akan dicari nilainya.

Contoh

Tentukanlah nilai dari $\int \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} dx$

Penyelesaian:

$$\int \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} dx = \int \frac{6x^2+6}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{A}{(x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} \right\} dx$$

Maka di dapat persamaan

$$6x^2 + 6 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

Dari persamaan jika

x = 1 di dapat → 6 * 1^2 + 6 = A (1+2) (1+3) +B (1 – 1) (x+3) + C(1 – 1) (1+2)

12 = 12 A

A = 1

2. Semua factor D(x) linear tetapi ada yang sama (berulang)

   Misalnya faktor-faktor D(x) adalah x – a, x – b, x – c, x – c, x – d, x – d, dan x – d, maka D(x) = (x – a) (x–b) (x – c)^2 (x – d)^3. Selanjutnya dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \frac{E}{x-d} + \frac{F}{(x-d)^2} + \frac{G}{(x-d)^3}$. Perhatikan suku-suku pecahan di ruas kanan terutama yang sesuai dengan akar sama c dan d.

   Contoh

   Tentukan nilai dari $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx$

   Penyelesaian:

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx = \int \left\{ \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \right\} dx$$

Maka di dapat persamaan:

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)}{(x-2)(x+1)^3}$$

$x = A(x+1)^3 + B\,(x-2)\,(x+1)^2 + C(x-2)\,(x+1) + D(x-2)$

dari persamaan jika

$x = 2$ di dapat $\rightarrow 2 = A(2+1)^3 + B(2-2)(2+1)^2 + C(2-2)\,(2+1) + D(2-2)$

$\rightarrow 2 = 27\,A$

$\rightarrow A = \frac{2}{27}$

$x = -1$ di dapat $\rightarrow -1$

$= A(-1+1)^3 + B(-1-2)(-1+1)^2 + C(-1-2)(-1+1) + D(-1-2)$

$\rightarrow -1 = -3D$

$D = \frac{1}{3}$

$x = 1$ di dapat

$1 = A(1+1)^3 + B(1-2)(1+1)^2 + C(1-2)(1+1) + D(1-2)$

$= 8A - 4B - 2C - 1D$

$= 8\frac{2}{27} - 4B - 2C - 1\,\frac{1}{3}$

$= \frac{16}{27} - 4B - 2C - \frac{1}{3}$

$\frac{20}{27} = -4B - 2C$

$x = 0$ didapat

$0 = A(0+1)^3 + B(0-2)(0+1)^2 + C(0-2)(0+1) + D(0-2)$

$= A - 2B - 2C - 2D$

$= \frac{2}{27} - 2B - 2C - 2\,\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{27} + \frac{2}{3} = -2B - 2C$

$-\frac{16}{27} = -2B - 2C$

Dari keempat persamaan tersebut didapat:

$$A = \frac{2}{27}, B = -\frac{2}{27}, C = -\frac{6}{27}, D = \frac{1}{3}$$

Maka,

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}dx = \int \left\{ \frac{\frac{2}{27}}{(x-2)} + \frac{-\frac{2}{27}}{(x+1)} + \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} \right\} dx$$

$$= \int \frac{\frac{2}{27}}{(x-2)}dx + \int \frac{-\frac{2}{27}}{(x+1)}dx + \int \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2}dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3}dx$$

$$= \frac{2}{27}\int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{2}{27}\int \frac{1}{(x+1)}dx - \frac{6}{27}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$$= \frac{2}{27}\ln|x-2| - \frac{2}{27}\ln|x+1| - \frac{6}{27}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2}{27}\ln|x-2| - \frac{2}{27}\ln|x+1| + \frac{6}{27}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+1)^2}$$

3. D(x) mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan.
   Misal D(x) = (x–p) (x–q)^2 {(x–a)^2 + b^2}{(x– c)^2 + d^2} maka perlu dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2}$.

4. D(x) mempunyai faktor kuadrat yang sama
   Misal D(x) = (x–p) (x–q)^2 {(x–a)^2 + b^2}{(x–c)^2 + d^2}^{3} maka perlu dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2+d^2} + \frac{Hx+I}{((x-c)^2+d^2)^2} + \frac{Jx+K}{((x-c)^2+d^2)^3}$.

SOAL LATIHAN

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan Integral Fungsi Rasional?
2. Tentukan nilai dari
   a. $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx$
   b. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-4} dx$
3. Tentukan nilai dari
   a. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$
   b. $\int \frac{x^4-19x^2-48x+60}{x^2+6x+13} dx$
4. Tentukan nilai dari
   a. $\int \frac{1}{x(x+7)} dx$
   b. $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x} dx$
5. Tentukan nilai dari
   a. $\int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+4)} dx$
   b. $\int \frac{x}{(x^2-1)^2(x^2+1)} dx$

BAB VIII
INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Rumus-rumus sederhana

1. Rumus dasar Trigonometri

1	$\int sinx\, dx = -\, cosx + c$
2	$\int cosx\, dx = sinx + c$
3	$\int tanx\, dx = In\,(secx\,) + c = -In\,(\,cosx\,) + c$
4	$\int cotanx\, dx = In\,(\,sinx\,) + c = -(cosecx\,) + c$
5	$\int secx\, dx = In\,(\,secx + tanx\,) + c$
6	$\int cosecx\, dx = In\;\; cosecx - cotanx + c$

Rumus-rumus identitas trigonometri

1.	$\sin x + \cos x = 1$
2.	$1 + tan^2\, x = sec^2\, x$
3.	$1 + cot^2\, x = csc^2\, x$
4.	$sin^2\, x = \frac{1-cos\, 2x}{2}$
5.	$cos^2\, x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
6.	$sin^2\, x - cos^2\, x = \cos 2x$
7.	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
8.	$\sin mx \,.\cos nx = \frac{1}{2}\,[\sin(m+n)x + \sin(m-n)\,x]$
9.	$\sin mx \,.\sin nx = -\,\frac{1}{2}\,[\cos(m+n)\,x - \cos(m-n)\,x]$
10.	$\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2}\,[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

Contoh soal:

1. Tentukan $\int 12(2x+1) \sin\; (x^2 + x\,)dx$

   Penyelesaian:

   Misalkan: $u\; = x^2 + x\;,$

maka $du = (2x + 1)dx$, $atau\ dx = \frac{1}{2x} + 1\ du$

$\int 12(2x + 1)\sin(x^2 + x)dx = \int 12(2x + 1)\sin(u).\frac{1}{2x} + 1\ du$

$\int 12\sin(u)\ dx = -12\cos(u) + c$ atau dalam x:

$= -12\ cos\ (x^2\ + x)\ c$

2. Tentukan $\int 3\cos\ (6x + 2)dx$

   Penyelesaian:

   Misalkan: $u = 6x + 2$, maka $du = 6\ dx$, atau $dx = 1/6\ du$, selanjutnya diperoleh:

   $\int 3\cos(6x + 2)dx = 3\int \cos(u)1/6\ du = \frac{1}{2}\sin(u) + c$

   Maka penyelesaian dalam variable x diperoleh :

   $\int 3\cos(6x + 2)\ dx = 1/2\ sin\ (6x + 2) + c$

3. Tentukan $\int 3e2^x \tan(e2^x + 9)\ dx$

   Penyelesaian:

   Misalkan: $u = e2^x + 9$,maka $du = 2e2^x dx$ atau $dx = 1/2e2^x du$

   $$\begin{aligned}\int 3e2^x\ \tan(e2^x + 9)\ dx &= \int 3e2^x \tan(u).\frac{1}{2e2^x}\ dx \\ &= \frac{3}{2}\int \tan(u)dx \\ &= -\frac{3}{2}\ In\ [\ cos\ (u)\ ] + \mathrm{c} \\ &= -\frac{3}{2}\ In\ [\cos\ (\mathrm{e}2^x + 9)] + c\end{aligned}$$

Dalam bentuk fungsi u diperoleh formula integral trigonometri sebagai berikut:

2. Integral Fungsi Sinus

Berikut adalah formula untuk menentukan integral dari fungsi sinus:

$$\int a\sin u\ dx = -\mathrm{a}\cos u + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 12(2x + 1)\sin(x^2 + x)\ dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + x$, maka $du = (2x + 1)dx$ atau $dx = \frac{1}{2x+1} du$, sehingga diperoleh:

$$\int 12(2x+1)\sin(x^2 + x)\,dx = \int 12(2x+1)\sin(u)\frac{1}{2+1}du$$

$$\int 12\sin(u)\,du = -12\cos(u) + C \text{ atau dalam } x:$$

$$= -12cos(x^2 + x) + C$$

3. Integral Fungsi Cosinus

Berikut adalah formula untuk menentukan integral dari fungsi sinus:

$$\int a\cos u\,du = a\sin u + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 3xcos(4x^2 + 5)dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 4x^2 + 5$, maka $du = 8xdx$, atau $dx = \frac{1}{8x}du,$ selanjutnya disubstitusikan ke soal dan diperoleh:

$$\int 3xcos(4x^2 + 5)dx = \int 3xcos(u)\frac{1}{8x}du = \frac{3}{8}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{3}{8}\sin(u) + C = \frac{3}{8}\sin(4x^2 + 5) + C$$

4. Integral Fungsi Tangen

Berikut adalah formula untuk menentukan integral tangen:

$$\int tanx\,dx = In(\sec x) + C = -In(\cos x) + C$$

$$\int a\tan u\ du = aIn(\sec u) + C = -a\,In(\cos u) + C$$

$$\int a\tan(Ax + B)\,dx = \frac{a}{A}In[\sec(Ax + B)] + C$$

$$= -\frac{a}{A}In[\cos(Ax + B)] + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 7sin2xtan[cos2x + 1]dx$

Penyelesaian:

Misalkan: $u = [cos2x + 1]$, maka $du = -2sin[2x]dx$, atau $dx = \frac{1}{-2\sin(2x)}du$

selanjutnya disubtitusikan kembali soal dan diperoleh:

$$\int 7\sin\ 2x\tan(u)\frac{1}{-2\sin(2x)}du = -\frac{7}{2}\int \tan(u)\,du$$

$$= -\frac{7}{2} In[\sec(u)] + C$$

Maka dalam variabel x diperoleh: $\int 7sin2x \tan\ (cos2x + 1)\, dx =$

$$-\frac{7}{2} In[\sec(cos2x + 1)] + C$$

$$= \frac{7}{2} In[\cos(cos2x + 1)] + C$$

5. Integral Cotangen

Berikut adalah formula untuk menentukan integral cotangen dan disertai contoh soal dan pembahasannya.

$$\int cotanx\, du = In(sinx) + C$$

$$\int acotanu\, du = aIn(sinu) + C = -aIn(cosecu) + C$$

$$\int acotan(Ax + B)dx = \frac{a}{A} In[\sin(Ax + b)] + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int (1 - 4x)cotan(2x - 4x^2)dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 2x - 4x^2$, maka $du = (2 - 8x)dx = 2(1 - 4x)dx$, atau $dx = \frac{1}{2(1-4x)} du$ dan subtitusikan kembali ke soal diperoleh:

$$\int (1 - 4x)cotan(u) \frac{1}{2(1-4x)} du = \frac{1}{2} \int cotan(u)du$$

$$= \frac{1}{2} In(\sin u) + C$$

$$= \frac{1}{2} In[\sin(2x - 4x^2)] + C$$

$$= -\frac{1}{2} In[cosec(2x - 4x^2)] + C$$

6. Integral Secan

Berikut adalah formula untuk menentukan integral secan:

$$\int \sec x\, dx = aIn(\sec + \tan x) + C$$

$$\int a \sec u\, du = aIn(\sec u + \tan u) + C$$

$$\int a \sec(Ax + B)\, dx = \frac{a}{A} ln\, n \sec(Ax + B) + \tan\,(Ax + B) + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 12(x-3)\sec\,(3x-\frac{1}{2}x^2)dx$

Penyelesaian:

Penyelesaian dilakukan dengan pemisalan sebagai berikut:

Misal: $u = 3x-\frac{1}{2}x^2$, maka $du = (3-x)dx, sehingga\ dx = \frac{1}{3-x}du,$ dan bentuk-bentuk ini disubtitusikan ke soal sehingga:

$$\int 12(x-3)\sec u\frac{1}{3-x}du = -12\int \sec u\, du$$
$$= -12In(\sec u+\tan u)+C$$
$$= -12\ In[sec(3x - \frac{1}{2}x^2) + tan(3x - \frac{1}{2}x^2)] + C$$

7. Integral Cosecan

Berikut adalah formula untuk menentukan integral cosecan:

$$\int cosecx\ dx = a\ In(cosecx - cotanx) + C$$
$$\int acosecu\ du = a\ In(cosecu - cotanu) + C$$
$$\int a\cos ec(Ax+B)dx = \frac{a}{A}In|cosec(Ax+B) - cotan(Ax+B)| + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 2xcosec(5x^2)dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = 5x^2$, maka $du = 10xdx$, sehingga $dx = \frac{1}{10x}du$

$$\int 2xcosec(5x^2)dx = \int 2xcosec(u)\frac{1}{10x}du$$
$$= \frac{1}{5}\int cosec(u)du$$
$$= \frac{1}{5}In(cosec\,u - cotan\,u) + C$$

Maka dalam variabel x diperoleh:

$$\int 2xcosec(5x^2)dx = \frac{1}{5}In(cosec5x^2 - cotan5x^2) + C$$

8. Integral Sec²x

Berikut adalah formula untuk menentukan integral sec^2x:

$$\int sec^2x\,dx = \tan x + C$$

$$\int a\,sec^2\,u\,du = a\tan u + C$$

$$\int a\,sec^2(Ax+B)du = \frac{a}{A}\tan(Ax+B) + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int \frac{2}{3}(1-13x^2)sec^2\left(x-\frac{13}{3}x^3\right)dx$ Penyelesaian:

Misalkan $u = x - \frac{13}{3}x^3$, maka $du = (1-13x^2)dx$, atau $dx = \frac{1}{1-13x^2}du$, sehingga

$$\int \frac{2}{3}(1-13x^2)sec^2\left(x-\frac{13}{3}x^3\right)dx =$$

$$\frac{2}{3}\int(1-13x^2)sec^2(u)\frac{1}{1-13x^2}du = \frac{2}{3}\int sec^2(u)du$$

$$= \frac{2}{3}\tan(u) + C, \text{ atau}$$

$$\int \frac{2}{3}(1-13x^2)sec^2(x-\frac{13}{3}x^3)dx = \frac{2}{3}\tan(x-\frac{13}{3}x^3) + C$$

9. Integral Cosec²x

Berikut adalah formula utuk menentukan integral $cosec^2x$

$$\int cosec^2\,x\,dx = -cotanx + C$$

$$\int a\,cosec^2\,u\,du = -a\,cotan\,u + C$$

$$\int a\,cosec^2(Ax+B)du = -\frac{a}{A}cotan(Ax+B) + C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int [sin\,(2x-1) - \frac{4}{\sin\,(2x-1}]^2dx$

Penyelesaian:

Bentuk soal dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\left(\sin(2x-1) - \frac{4}{\sin\,(2x-1)}\right)^2 = \sin^2(2x-1) - 8 + \frac{16}{sin^2(2x-1)}$$

Dari hubungan $cos2x = 1 - 2\sin^2x$, maka diperoleh $\sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,cos2x$, sehingga: $sin^2(2x-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x-2)$

Maka bentuk soal menjadi:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x-2) - 8 + 16\,cosec^2(2x-1)$ atau

$\frac{1}{2}\cos(4x-2)-\frac{15}{2}+16\,cosec^2(2x-1)$ dan dalam bentuk integral:

$$\int(-\frac{1}{2}\cos(4x-2)-\frac{15}{2}+16\,cosec^2(2x-1)dx=-\frac{1}{8}\sin(4x-2)-\frac{15}{2}x-8cota\,n(2x-1)+\ C$$

10. Integral $secx\ tanx$

Berikut adalah formula untuk menentukan integral bentuk $secxtanx$

$$\int\sec x\tan x dx=\sec x+C$$
$$\int a\sec u\tan u\,du=a\sec u+C$$
$$\int a\sec(Ax+B)\tan(Ax+B)\,dx=\frac{a}{A}\sec(Ax+B)+C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int 11cos2\,xsec(sin2x)\tan(sin2x)\,dx$

Pembahasan:

Penyelesaian soal dilakukan permisalan sebagai berikut:

Misalkan: $u=sin2x,$

maka $du=2cos2xdx, atau\ dx\frac{1}{2cos2x}du,$ dan dengan mensubstitusikan bentuk-bentuk di atas ke soal diperoleh:

$$\int 11cos2xsec(u)\tan(u)\frac{1}{2cos2x}du=\frac{11}{2}\int\sec(u)\tan(u)\,du$$
$$=\frac{11}{2}\sec(u)+\ C$$

Dengan mengembalikan hasil integral dalam bentuk x, maka diperoleh:

$$\int 11cos2xsec(sin2x)\tan(sin2x)\,dx=\frac{11}{2}\sec(sinx)+\ C$$

11. Integral $cosecx\ cotanx$

Berikut ini adalah formula untuk menentukan integral bentuk $cosec\ x\ cotan\ x$

$$\int cosecxcotanx\ dx=\ -cosecx+C$$
$$\int acosec(u)cotan(u)du=\ -acosecu+C$$
$$\int acosec(Ax+B)cotan(Ax+B)dx=\ -\frac{a}{A}cosec(Ax+B)+\ C$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int \frac{3}{2} e^{2x}\, cosec(1 - e^{2x}) cotan(1 - e^{2x}) dx$

Penyelesaian:

Misalkan: $u = 1 - e^{2x}$; sehingga $du = -2e^{2x}\, dx$,

atau $dx = \frac{1}{2e^{2x}} du$, sehingga dengan mensubstitusikan bentuk-bentuk diatas ke dalam soal:

$$\int \frac{3}{2} e^{2x} cosec(1 - e^{2x}) cotan(1 - e^{2x}) dx =$$

$$\frac{3}{2}\int e^{2x}\, cosec(u) cotan(u) (-\frac{1}{2e^{2x}}) du =$$

$$-\frac{3}{4}\int cosec(u) cotan(u) du = -\frac{3}{4} cosec(u) + C$$

$$= -\frac{3}{4} cosec(1 - e^{2x}) + C$$

B. Bentuk $\int R\,(\sin x) \cos x\, dx$ dan $\int R\,(\cos x) \sin x\, dx$

1. Bentuk $\int R\,(\sin x) \cos x\, dx$

Misalkan $u = \sin x$, maka $du = \cos x\, dx$

Diperoleh $dx = \frac{du}{\cos x}$.

$$\int (\sin x) \cos x\, dx = \int u\, cos\, x \frac{du}{\cos x}.$$

$$= \int u\, du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + c$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x)^2 + c$$

Contoh soal:

Tentukan $\int (sin^4 3x) \cos 3x\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin 3x$, $du = \cos(3x).3 = 3\cos 3x$

Maka $du = 3\cos 3x\, dx$

$$\frac{du}{3} = \cos 3x\, dx$$

$$\int sin^4 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^4 du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{1}{15}u^5 + c$$
$$= \frac{1}{15}(\sin 3x)^5 + c$$

2. **Bentuk $\int R\,(\cos x)\sin x\,dx$**

Misalkan $u = \cos x$, maka $du = -\sin x\,dx$

Diperoleh $dx = \frac{du}{-\sin x}$.

$$\int \sin x(\cos x)\,dx = \int \sin x\,u\frac{du}{-\sin x}.$$
$$= -\int u\,du$$
$$= -\frac{1}{2}u^2 + c$$
$$= -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + c$$

Contoh soal:

Tentukan $\int (cos^3 x).\sin x\,dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$

Maka $dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\int (cos^3 x).\sin x\,dx = \int u^3.\sin x\frac{du}{-\sin x}$$
$$= \int -u^3 du$$
$$= -\frac{1}{4}u^4 + c$$
$$= -\frac{1}{4}(\cos x)^4 + c$$

C. Integral dengan Memperhatikan Rumus-Rumus

1. Pengintegralan Fungsi Sinus dan Fungsi Cosinus

Kasus I:

Bentuk $\int sin^n xdx$ dan $\int cos^n xdx$ dengan $n \in N, n$ ganjil

Dalam menyelesaikannya digunakan rumus:

$cos^2 x = 1 - sin^2 x$

$sin^2 x = 1 - cos^2 x$

Contoh soal:

Tentukan $\int cos^3 xdx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int cos^3xdx &= \int cos^2xcosxdx\\ &= \int(1-sin^2x)cosxdx\\ &= \int cosxdx - \int(sin^2xcosxdx)\\ &= sinx - \int sin^2xdsinx\\ &= sinx - \tfrac{1}{3}sin^3x + c\end{aligned}$$

Kasus II:

Bentuk $\int sin^n xdx$ dan $\int cos^n xdx$ dengan $n \in N, n$ genap

Dalam menyelesaikannya digunakan rumus:

$$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$$

$$sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x$$

Contoh soal:

Tentukan $\int cos^2xd\,x$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int cos^2xd\,x &= \int\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}cos2x\right)dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int cos2xdx\\ &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\int cos2x\\ &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x\,dx + c\end{aligned}$$

Kasus III:

Bentuk $\int sin^m xcos^n dx$ dengan salah satu m atau n bilangan asli ganjil seangkan lainnya boleh sebarang. Penyelesaian bentuk integral tersebut sama seperti penyelesaian bentuk 1, dengan menggunakan rumus:

$$cos^2x = 1 - sin^2x$$

$$sin^2x = 1 - cos^2x$$

Contoh soal:

Tentukan $\int sin^3xcos^{-4}xdx$

Penyelesaian:

$$\int sin^3xcos^{-4}xdx = \int sin^2xsin\,xcos^{-4}xdx$$

$$= -\int (1 - cos\ ^2x\ )cos^{-4}xd(cosx)$$
$$= -\int cos^{-4}xd(cosx) + \int cos^{-2}xd(cosx)$$
$$= \frac{1}{3}cos^{-3}x - cos^{-1}x + c$$
$$= \frac{1}{3}sec^{33}x - secx + c$$

Kasus IV:

Bentuk $\int sin\ ^m\ xcos\ ^ndx$ dengan salah satu m dan n bilangan asli genap. Penyelesaian bentuk integral tersebut sama seperti penyelesaian bentuk 2, dengan menggunakan rumus:

$$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$$
$$sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x$$

Contoh soal:

Tentukan $\int sin^2xcos^2xdx$

Penyelesaian:

$$\int sin^2xcos^2xdx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\ \right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x\ \right)dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos^2 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2 2xdx$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos4x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int cos4xd(4x)$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sin4x + c$$

Kasus V:

Bentuk $\int \sin mx \cos nx\ sx$, $\int \sin mx \sin nx\ sx$, $\int \cos mx \cos nx\ sx, m, n \in R.$

Penyelesaian gunakan ru,us:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos\ (a+b)]$$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Contoh soal:

Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 3x\, dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(2x+3x) + (\sin 2x - 3x)] \\
&= \int \frac{1}{2}[\sin(5x) + \sin(-x))] \\
&= \int \frac{1}{2}\sin(5x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-x) dx \\
&= \frac{1}{10}\int \sin 5x\, d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx \\
&= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c
\end{aligned}$$

2. Teorema Pengintegralan Fungsi Lainnya

a. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

b. $\int \text{cotan}\, x\, dx = \ln \sin x| + c$

c. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

d. $\int \text{cosec}\, x\, dx = \ln|\text{cosec}\, x - \cot x| + c$

Bukti:

$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Misalkan $u = \cos x$, maka $du = -\sin x$, atau $-du = \sin x\, dx$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= \int \frac{-du}{u} \\
&= -\ln|u| + c \\
&= -\ln\ |\cos x| + c \\
&= \ln|cos^{-1}x| + c \\
&= \ln\ |\sec x| + c
\end{aligned}$$

Kasus I:

Bentuk $\int tan^n x dx$ dan $\int cot^n\, x\, dx$ dengan $n \in N$.

Penyelesaian menggunakan rumus identitas:

$tan^2 x = sec^2 x - 1$

$cot^2 x = cosec^2 x - 1$

Contoh soal:

Tentukan $\int tan^4 x\, dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int tan^4 x\, dx &= \int tan^2 x tan^2 x\, dx\\ &= \int tan^2 x(sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int tan^2 x sec^2 x\, dx - \int tan^2 dx\\ &= \int tan^2 x(\tan x) - \int (sec^2 - 1) dx\\ &= \int tan^2 x(\tan x) - \int sec^2 dx + \int dx\\ &= \frac{1}{3} tan^3 x - \tan x + x + c\end{aligned}$$

Kasus II:

Bentuk $\int tan^m x sec^n dx$ dan $\int cot^m\, x\, cosec^n dx$ dengan n bilangan asli genap sedangkan m bilangan sebarang.

Penyelesaian menggunakan rumus identitas:

$1 + tan^2 x = sec^2$

$1 + cot^2 x = cosec^2 x$

Contoh soal:

Tentukan $\int tan^{-\frac{3}{2}}\, x\, sec^4 x\, dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int tan^{-\frac{3}{2}}\, x\, sec^4 x\, dx &= \int tan^{-\frac{3}{2}}\, x\, sec^2 x sec^2 x\, dx\\ &= \int tan^{-\frac{3}{2}}\, x\, sec^2 x(1 + tan^2 x\,)dx\\ &= -2tan^{-\frac{1}{2}}\, x + \frac{2}{3} tan^{\frac{3}{2}}\, x + c\end{aligned}$$

Kasus III:

Bentuk $\int tan^m x sec^n dx$ dan $\int cot^m\, x\, cosec^n dx$ dengan m bilangan asli ganjil sedangkan n bilangan sebarang.

Penyelesaian menggunakan rumus identitas:

$tan^2 x = sec^2 - 1$

$cot^2 x = cosec^2 x - 1$

Contoh soal:

Tentukan $\int tan^3 x sec^{-\frac{1}{2}} x\, dx$

Penyelesaian:

$$\int tan^3 x sec^{-\frac{1}{2}} x\, dx = \int tan^2 x \tan x\, sec^{-\frac{1}{2}} x\, dx$$
$$= \int tan^2 x sec^{-\frac{1}{2}} x (\sec x tan\, x)\, dx$$
$$= \int (tan^2 x - 1) sec^{-\frac{3}{2}}\, x\, d(\sec x)$$
$$= \frac{2}{3} sec^{\frac{3}{2}} x + 2sec^{-\frac{1}{2}}\, x + c$$

D. Substitusi $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ dan $\int R\, (\tan x) dx$

Untuk menyelesaikan integral yang memuat bentuk akar kuadrat, maka dibutuhkan substitutsi trigonometri agar bentuk akarnya hilang. Faktor substitusi yang digunakan bergantung pada bentuk substitusi yang diberikan. Setelah peubahnya disubstitusi dengan fungsi trigonometri yang sesuai, maka bentuknya menjadi fungsi trigonometri yang dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus reduksi atau rumus sebelumnya yang telah dipelajari.

1. Subsitusi Trigonometri

Subsitusi trigonometri efektif digunakan untuk integral yang memuat bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, atau $\sqrt{x^2 - a^2}$ tabel berikut ini merupakan daftar substitusi trigoometri yang efektif untuk meghilangkan tanda akar karena adanya identitas trigonometri yang relevan.

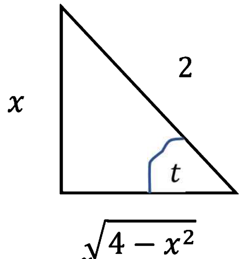
Tabel 4.1 Daftar Substitusi Trigonometri

Bentuk	Substitusi	Identitas Trigonometri
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ \sin\theta$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sin^2\theta = cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + b^2}$	$x = a\ tg\ \theta$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 + tg^2\theta = sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec\theta$	$sec^2\theta - 1 = tg^2\theta$

	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ $atau$ $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	

Contoh soal

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$
   Penyelesaian:
   Misalkan: $x = 2\sin t$ maka $dx = 2\cos t\, dt$



$$\sin t = \frac{x}{2}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \text{ maka } 2\cos t = \sqrt{4-x^2}$$

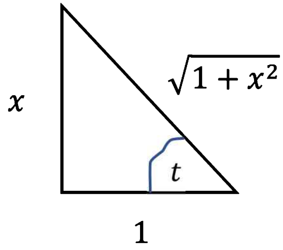
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2\cos t\, dt}{2\sin t^2 2\cos t}$$

$$= \frac{1}{4}\int sec^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{4} ctg\ t + c$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} dx$
   Penyelesaian:
   Misalkan: $x = tg\ t$ maka $dx = sec^2 t\, dt$



$$x = tg\ t$$
$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\sec t = \sqrt{1+x^2}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{sec^2 t\ dt}{\sec t}$$
$$= \int \sec t\ dt$$
$$= \ln[\sec t\ + tg\ t\ ] + c$$
$$= \ln\left[\sqrt{1+x^2} + x\right] + c$$

2. Strategi untuk Menghitung $\int tg^m x ec^n x\ dx$

a. Jika pangkat dari secan adalah bilangan genap $(n = 2k)$, simpan satu faktor $sec^2 x$ dan gunakan : $sec^2 x = 1 + tg^2 x$ untuk menyatakan faktor yang tersisa dalam tangen:

$$\int tg^m x sec^{2k} x\ dx = \int tg^m x\ sec^2\ x\ sec^2\ xdx$$
$$= \int tg^m x(1 +$$
$$tg^2 x)\ sec^2 x\ dx\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Selanjutnya substitusikan $u = tg\ x$.

b. Jika pangkat dari tangen adalah bilangan ganjil $(m = 2k\ + 1)$, simpan satu faktor $secx\ tgx$ dan digunakan $tan^2 x\ = sec^2 x - 1$ untuk menyatakan faktor yang tersisa dalam secan:

$$\int tg^{2k+1} x sec^2 x\ dx = \int (tg^2 x\ ) sec^{n-1} x \sec x\ tg\ x\ dx$$

$$= \int (x - 1)\ x \sec x\ tg\ x\ dx$$

Selanjutnya subsitusikan $u = \sec x$

E. Rumus Reduksi untuk Integral Fungsi Trigonometri

Rumus reduksi dalam integral memiliki banyak fungsi karena dalam menyelesaikan sebuah persoalan matematika tidak cukup menggunakan satu rumus. Rumus-rumus yang digunakan untuk menyelesaikan persosalan integral bentuk trigonometri dengan menggunakan rumus reduksi. Reduksi berarti pengurangan pangkat tinggi menjadi pangkat kecil sehingga persoalan integral dapat diselesaikan.

1. Integral Sinus

Berikut adalah formula untuk menentukan integral sinus berpangkat banyak

$$a\int sin^n\, u\, du = a\left(-\frac{1}{n}\, sin^{n-1}\, u.\cos u + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}\, u\, du\right), n \geq 2$$

Contoh soal:

Tentukan $\int 2sin^3\, x\, dx$ dengan menggunakan rumus reduksi.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus di atas, $n = 3$ maka:

$$\int 2sin^3 x\, dx = 2\left(-\frac{1}{3} sin^{3-1}x.\cos x + \frac{3-1}{3}\int sin^{3-2}\, xdx\right)$$
$$= 2\left(-\frac{1}{3} sin^2 x.\cos x + \frac{2}{3}\sin \int sin\, x\, dx\right)$$
$$= 2(-\frac{1}{3} sin^2 x.\cos x - \frac{2}{3}\cos x) + C$$
$$= -\frac{2}{3} cosx(sin^2 x + 2) + C$$

2. Integral Cosinus

Berikut adalah formula untuk menentukan integral Cosinus berpangkat banyak

$$a\int cos^n\, u\, du = a\left(\frac{1}{n} cos^{n-1}u.\sin u + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}\right) udu; n \geq 2$$

Contoh soal

Tentukan $\int cos^4 xdx$ dengan rumus reduksi.

Penyelesaian:
Dari soal diperoleh $n = 4$, dan dengan menggunakan rumus reduksi cosinus:

$$\int cos^4 xdx = \frac{1}{4} cos^{4-1} x. \sin x + \frac{4-1}{4} \int cos^{4-2} xdx$$
$$= \frac{1}{4} cos^3 x. \sin x + \frac{3}{4} \int cos^2 x\, dx,$$

sehingga

$$\int cos^4 xdx = \frac{1}{4} cos^3 x. sinx + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x\right) + C$$
$$= \frac{1}{4} cos^3 x. sinx + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C$$

3. Integral Perkalian Sinus dengan Cosinus Berpangkat Banyak

Jika ditemukan bentuk soal integral trigonometri perkalian sinus dengan cosinus berpangkat banyak maka rumusnya sebagai berikut:

$$\int sin^m cos^n u\, du = \frac{1}{m+n} (sin^{m+1} u. cos^{n-1} u) +$$
$$\frac{n-1}{m+n} \int sin^m u. cos^{n-2} u\, du$$

Atau $= \frac{-1}{m+n} (sin^{m-1} u. cos^{n+1} u) + \frac{m-1}{m+n} \int sin^{m-2} u\, du$

Contoh soal

Tentukan $2xsin^2(3x^2 - 1) \int \cos(3x^2 - 1)dx$

Penyelesaian:

Peneyelesaian persoalan diatas dilakukan dengan pemisalan sebagai berikut:

Misalkan: $u = 3x^2 - 1$, maka $du = 6xdx$ atau $dx = \frac{1}{6x}$, sehingga:

$$\int 2xsin^2 ucosu \frac{1}{6x} du = \frac{1}{3} \int sin^2 ucos\, u\, du$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} sin^3 u + C\right), \text{dan dalam } x$$
$$= \frac{1}{9} sin^3(3x^2 - 1) + C$$

4. Integral Tangen Berpangkat Banyak

Integral tangen berpangkat banyak maksudnya adalah untuk menentukan hasil integral dari tangen berpangkat dua atau lebih dengan formula:

$$\int tan^n\, udu = \frac{1}{n-1} tan^{n-1}u - \int tan^{n-2}\, udu$$

$$\int a\, tan^n(Ax+B)dx = \frac{a}{A}\left[\frac{1}{n-1} tan^{n-1}(Ax+B) - \int tan^{n-2}(Ax+B)dx\right]$$

Contoh Soal

Tentukan $\int tan^2\, xdx$

Penyelesaian:

Dari soal diperoleh $n = 2$, sehingga dengan menggunakan rumus di atas:

$$\int tan^2\, xdx = \frac{1}{2-1} tan^{2-1}\, x - \int tan^{2-2}\, xdx = tan\, x - \int dx = tanx - x + C$$ atau

$$tan^2x = sex^2x - 1, sehingga: \int tan^2xdx = \int (sec^2x - 1)dx = \tan x - x + C$$

5. Integral Cotangen Berpangkat Banyak

Integral cotangent berpangkat banyak maksudnya adalah untuk menentukan hasil integral dari cotangen berpangkat dua atau lebih dengan formula berikut:

$$\int cotan^n udu = -\frac{1}{n-1} cotan^{n-1}u - \int cotan^{n-2}udu$$

$$\int acotan^n(Ax+B)dx = \frac{a}{A}\left[-\frac{1}{n-1} cotan^{n-1}(Ax+B) - \int cotan^{n-2}(Ax+B)dx\right]$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int cotan^3\, xdx$

Penyelesaian:

$\int cotan^n\, udu = -\frac{1}{n-1} cotan^{n-1}\, u - \int cotan^{n-2}\, udu$, maka:

$$\int cotan^3\, xdx = -\frac{1}{3-1} cotan^{3-1}x - \int cotan^{3-2}\, xdx$$

$$= -\frac{1}{2}cotan^2x - \int cotandx$$
$$= -\frac{1}{2}cotan^2x - In(cosx)$$
$$= -\frac{1}{2}cotan^2x + In(secx) + C$$

6. Integral Secan Berpangkat Banyak

Berikut formula yang digunakan untuk menentukan integral dari fungsi secan berpangkat banyak $(n > 2)$, karena untuk secan berpangkat dua sudah diberikan hasil integralnya

$$\int sec^n\, udu = \frac{1}{n-1}sec^{n-2}\, u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}\, udu$$

Contoh Soal:

Tentukan $\int sec^3x\, dx$

Penyelesaian:

Jika disesuaikan dengan rumus, maka diperoleh pangkatnya adalah n = 3, sehingga

$\int sec^nudu = \frac{1}{n-1}sec^{n-2}\, u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}xdx$ maka,

$$\int sec^3xdx = \frac{1}{3-1}sec^{3-2}xtanx + \frac{3-2}{3-1}\int sec^{3-2}xdx$$
$$= \frac{1}{2}secx \tan x + \frac{1}{2}\int secxdx$$
$$= \frac{1}{2}secxtanx + \frac{1}{2}In|secx + tanx| + C$$

7. Integral Cosecan Berpangkat Banyak

Berikut formula yang digunakan untuk menentukan integral dari fungsi cosecan berpangkat banyak $(n > 2)$, karena untuk cosecan berpangkat dua sudah diberikan hasil integralnya .

$$\int cosec^nudu = -\frac{1}{n-1}cosec^{n-2}u\, cotan\, u + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2}udu$$

Contoh Soal:

$\int cosec^3xdx$

Penyelesaian:

Jika disesuaikan dengan rumus maka diperoleh pangkatnya adalah $n = 3$

$$\int cosec^n u du = -\frac{1}{n-1} cosec^{n-2} u\ cotan\ u + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2} u du$$

$$\int cosec^3 x dx = -\frac{1}{3} - 1 cosec^{3-2} x cotan x + \frac{3-2}{3-1}\int cosec^{3-2} x dx = -\frac{1}{2} cosec x . \cot an x + \frac{1}{2}\int cosec x dx$$

$$= -\frac{1}{2} cosec x . \cot an x + \frac{1}{2} In\left| cosec x - cotan x \right| + C$$

BAB IX
INTEGRAL FUNGSI IRASIONAL

A. Rumus Yang Perlu Dihafal

Fungsi irasional merupakan fungsi yang melibatkan satu atau lebih polinomial radikal. Integral fungsi irasional dapat mengandung fungsi linier, kuadratik ataupun fraksional linier. Berikut ini beberapa bentuk integrasi tak tentu untuk fungsi irasional beserta solusinya,

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$
2. $\int \sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + C$
3. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C$
4. $\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{3/2} + C$
5. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right| + C$, untuk b - ac > 0.
6. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} + C$, untuk b - ac < 0.
7. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\, dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \ln\left|\sqrt{a(cx+d)} + \sqrt{c(ax+b)}\right| + C$, untuk $a > 0$.
8. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\, dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}} + C$, untuk a < 0, c > 0.
9. $\int x^2\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)}{105b^3}(ax+b)^{3/2} + C$
10. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{ax+b}}\, dx = \frac{2(8a^2-4abx3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{ax+b} + C$
11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right| + C$, untuk $a > 0$.
12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1}\left|\frac{a+bx}{-a}\right| + C$, untuk $a < 0$.
13. $\int \frac{dx}{(x-a)(b-a)} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}\right| + C$, untuk $a > 0$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{b^2 - 4ac} + C$, untuk $a < 0$.

16. $\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{|a|} + C$

17. $\int x\sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)^{3/2} + C$

18. $\int x^2\sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

19. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

21. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 + a^2} + a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C$

23. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

25. $\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

26. $\int x\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2 - a^2)^{3/2} + C$

27. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2 - a^2} + a\sin^{-1}\frac{a}{x} + C$

28. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + C$

31. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{a}{x} + C$

33. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C$

34. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} + C$

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

36. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

37. $\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

38. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

39. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C$

40. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$, untuk a > 0.

41. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C$

42. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

44. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

45. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

46. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + C$

47. $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$

50. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\sin^{-1}\frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C$, untuk b > *a*.

51. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2+bx}\right| + C$, untuk b < *a*.

52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

53. $\int (a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

54. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

B. Bentuk Irasional Satu Suku

Bentuk integrasi irasional satu suku yaitu bila pada suatu fungsi radikal mengandung suku tunggal x. Penyelesaiannya dapat dilakukan dengan melakukan substitusi $y = \sqrt[n]{x}$ dimana n merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari pangkat akarnya. Contoh untuk integral bentuk irasional satu suku, adalah $\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} dx$.

Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, kita gunakan n = 4 sehingga untuk substitusinya adalah $y = \sqrt[4]{x}$.

$$y = \sqrt[4]{x}$$
$$x = y^4$$
$$\mathrm{d}x = 4y^3 dy$$

dari persamaan tersebut kita subtitusikan ke dalam persamaan integralnya,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} dx$$

sehingga menjadi,

$$\int \frac{\sqrt{y^4}}{4+\sqrt{y^4}} 4y^3 dy$$

selanjutnya disusun bentuk integralnya,

$$= \int \frac{\sqrt{y^4}}{4+\sqrt{y^4}} 4y^3 dy = 4\int \frac{y^5}{4+y^2} dy = 4\int \frac{(4+y^2)y^3 - 4y^3}{4+y^2} dy$$

$$= 4\int y^3\, dy - 4\int \frac{4y^3}{4+y^2} dy$$

$$= 4\int y^3\, dy - 16\int \frac{(4+y^2)y - y}{4+y^2} dy$$

$$= 4\int y^3\, dy - 16\int \mathrm{y}\, dy + 16\int \frac{4y}{4+y^2} dy$$

hingga diperoleh,

$$= 4\int y^3\,dy - 16\int y\,dy + 64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy$$

untuk suku terakhir $64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy$ dapat diselesaikan dengan melakukan substitusi dengan memisalkan kembali $u = 4+y^2$

$$u = 4+y^2$$
$$du = 2y\,dy$$

persamaan integrasi $64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy$ dapat dituliskan menjadi,

$$64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy = 32\int \frac{2y}{4+y^2}\,dy = 32\int \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}} = 32\,ln|u| + C$$

bila dikembalikan menjadi bentuk y, maka diperoleh

$$64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy = 32\,ln|4+y^2| + C$$

jadi untuk keseluruhan integrasi tersebut diperoleh solusi

$$= 4\int y^3\,dy - 16\int y\,dy + 64\int \frac{y}{4+y^2}\,dy$$
$$= y^4 - 8y^2 + 32\,ln|4+y^2| + C$$

dan bila dikembalikan menjadi bentuk *x*, maka diperoleh

$$= x - 8\sqrt{x} + 32\,ln|4+\sqrt{x}| + C$$

sehingga,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}\,dx = x - 8\sqrt{x} + 32\,ln|4+\sqrt{x}| + C$$

C. Satu-satunya Bentuk Irasional

Integrasi bentuk ini terbagi atas dua jenis radikal. Bentuk radikal pertama adalah $\sqrt{ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}}$. Penyelesaian analitiknya dapat dilakukan rasionalisasi secara substitusi menjadi bentuk,

$$ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = a\left(x + \frac{\mathrm{b}}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{b}^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Substitusi $u = x + \frac{b}{2a}$, sebagai contoh bentuk integrasi yang memiliki radikal satu-satunya $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sebagai berikut,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$u = x + \frac{b}{2a} = x + \frac{2}{2 \cdot 1} = x + 1$$

turunan pertama untuk *u* adalah,

$$u = x + 1$$

$$du = dx$$

bentuk radikal disusun menjadi

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 - \left(\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1}\right)$$

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 - \left(\frac{4 - 12}{4}\right) = (x + 1)^2 + 2$$

sehingga bentuk integral menjadi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 + 2}}$$

substitusi *x* dengan *u* menjadi,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1)^2 + 2}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u)^2 + 2}}$$

penyelesaian integrasi dengan substitusi

$$u = \sqrt{2}\, tan\theta$$

dengan turunan pertamanya adalah,

$$du = \sqrt{2}\, sec^2\theta\, d\theta$$

kedua bentuk ini disubstitusikan pada

$$\int \frac{\sqrt{2}\, sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\, tan\theta\right)^2 + 2}} = \int \frac{\sqrt{2}\, sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2\, tan^2\theta + 2}} = \int \frac{\sqrt{2}\, sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2\, sec^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\, sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{2}\ \ sec\,\theta} = \int sec\,\theta\, d\theta$$

hasil integrasi ini adalah,

$$= \int sec\,\theta\, d\theta = ln|tan\,\theta\ +\ sec\,\theta| +\ C$$

bila variabel θ dikembalikan menjadi u

$$= ln|tan\,\theta\ +\ sec\,\theta| +\ C = ln\left|\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{u^2+2}}{\sqrt{2}}\right| +\ C$$

selanjutnya bentuk ini variabel u dikembalikan menjadi x

$$= ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(x+1)^2+2}}{\sqrt{2}}\right| +\ C$$

jadi solusi dari integrasi tersebut adalah,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(x+1)^2+2}}{\sqrt{2}}\right| +\ C$$

Radikal lainnnya adalah $\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$, yang penyelesaian analitiknya dengan mensubstitusi radikal tersebut dengan u. Sebagai contoh bentuk integrasinya adalah sebagai berikut,

$$\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,\mathrm{dx}$$

untuk menyelesaikannya misalkan u sebagai,

$$u = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$$

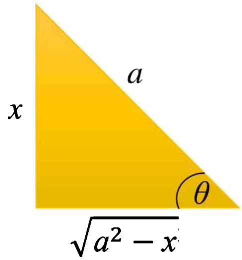
dari persamaan tersebut dilakukan pemisahan variabel agar diperoleh variabel x yang akan dilakukan substitusi ke persamaan integralnya.

$$u^2 = \frac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}-3}$$
$$u^2(\mathrm{x}-3) = \mathrm{x}+2$$
$$\mathrm{x}u^2 - 3u^2 = \mathrm{x}+2$$
$$\mathrm{x}u^2 - \mathrm{x} = 3u^2+2$$
$$\mathrm{x}(u^2-1) = 3u^2+2$$
$$\mathrm{x} = \frac{3u^2+2}{u^2-1}$$

$$x = \frac{3u^2 - 3 + 5}{u^2 - 1}$$
$$x = \frac{3u^2 - 3}{u^2 - 1} + \frac{5}{u^2 - 1}$$
$$x = 3 + \frac{5}{u^2 - 1}$$
dari persamaan ini, dilakukan diferensiasi pertama sehingga diperoleh,
$$dx = -\frac{10u}{(u^2 - 1)^2}du$$
kemudian, untuk menyelesaikan integrasinya dilakukan substitusi terhadap persamaan integral awalnya menjadi,
$$\int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx = \int (u)\left(-\frac{10u}{(u^2-1)^2}\right)du = -\int \frac{10u^2}{(u^2-1)^2}du$$
dengan mengubah bentuk persamaan menjadi fraksi parsial diperoleh,
$$= -10\int \left(-\frac{1}{4(u+1)} + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2}\right)du$$
hasil integrasinya adalah,
$$= -10\left(-\frac{1}{4}\ln|u+1| - \frac{1}{4(u+1)} + \frac{1}{4}\ln|u-1| + \frac{1}{4(u-1)}\right) + C$$
bila dikembalikan menjadi ke bentuk semula dengan variabel *x* maka diperoleh,
$$= -10\left(-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}+1\right| - \frac{1}{4\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}+1\right)} + \frac{1}{4}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}-1\right| + \frac{1}{4\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}-1\right)}\right) + C$$
atau dapat ditulis juga menjadi,
$$= \sqrt{x+2}\sqrt{x-3} + \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}+1\right| - \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}-1\right| + C$$

D. Subsitusi Trigonometri

Dalam penyelesaian integrasi irasional dapat juga dilakukan dengan substitusi menggunakan fungsi trigonometri. Bentuk radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, dan $\sqrt{a^2 + x^2}$ yang dapat diselesaikan dengan substitusi. Bentuk trigonometri ini berdasarkan pada dalil Pythagoras.



Gambar 9.D.1 Ilustrasi hubungan x, a dan radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Substitusi untuk variabel x dengan fungsi trigonometri dapat dituliskan,

$$\sin\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\sin\theta$$

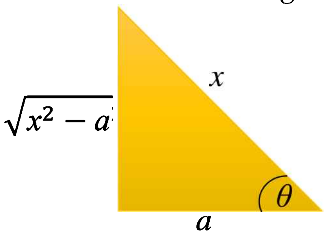
$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)} = \sqrt{a^2(\cos^2\theta)}$$

sehingga hasil dari akar tersebut adalah

$$|a\cos\theta| = a\cos\theta$$

Namun perlu diingat, ketika melakukan subtitusi, batasan integral untuk nilai θ pada rentang $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Untuk bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$ diilustrasikan sebagai berikut,



Gambar 9.D.2 Ilustrasi hubungan x, a dan radikal $\sqrt{x^2 - a^2}$.

$$\cos\theta = \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$$

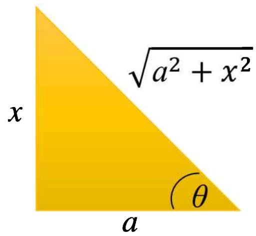
$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2(\tan^2\theta)}$$

sehingga hasil dari akar tersebut adalah

$$|a\tan\theta| = a\tan\theta$$

Dalam proses substitusi integrasi, batasan integral untuk nilai θ diberikan pada rentang $0 \leq \theta \leq \pi$, dimana nilai θ tidak sama dengan $\pi/2$.

Bentuk berikutnya adalah $\sqrt{a^2 + x^2}$,



Gambar 9.D.3 Ilustrasi hubungan x, a dan radikal $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Substitusi untuk variabel x dengan fungsi trigonometri dapat dituliskan,

$$\tan\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\tan\theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a\tan\theta)^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta)}$$

sehingga hasil dari akar tersebut adalah,

$$|a\sec\theta| = a\sec\theta$$

Serupa dengan bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, ketika melakukan subtitusi, batasan integral untuk nilai θ bentuk ini, pada rentang $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Sebagai contoh dalam menyelesaikan integral irasional dengan melakukan substitusi trigonometi, perhatikan soal berikut ini,

1. $\int \sqrt{16 + x^2} dx$
2. $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Penyelesaiannya sebagai berikut,

1. $\int \sqrt{16 + x^2} dx$

Bentuk substitusi untuk x adalah $x = a \tan \theta$, yang tentunya dari persoalan ini nilai a^2 adalah 16, sehingga nilai a adalah 4.
Jadi diketahui,

$$x = a \tan \theta$$
$$x = 4 \tan \theta$$

bentuk turunan pertama dari x adalah,

$$dx = 4 \sec^2 \theta \, d\theta$$

kedua bentuk ini akan disubtitusikan pada

$$\int \sqrt{16 + x^2} dx$$

sehingga menjadi,

$$= \int \sqrt{16 + (4 \tan \theta)^2} (4 \sec^2 \theta \, d\theta)$$
$$= \int \sqrt{16 + 16 \tan^2 \theta} (4 \sec^2 \theta \, d\theta)$$
$$= \int \sqrt{16(1 + \tan^2 \theta)} (4 \sec^2 \theta \, d\theta)$$
$$= \int 4 \sqrt{1 + \tan^2 \theta} (4 \sec^2 \theta \, d\theta)$$

diketahui $sec^2\ \theta = 1 + tan^2\ \theta$, sehingga menjadi,

$$= 16 \int \sqrt{sec^2\ \theta}\ sec^2\ \theta\ d\theta$$

$$= 16 \int\ sec^3\ \theta\ d\theta$$

$$= 16 \left[\frac{1}{2} sec\ \theta tan\ \theta + \frac{1}{2} ln|sec\ \theta + tan\ \theta| + C \right]$$

dari bentuk ini, kita kembalikan menjadi bentuk variabel x dengan mengganti $tan\ \theta = \frac{x}{4}$ dan $sec\ \theta = \frac{\sqrt{16+x^2}}{4}$

$$= 16 \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{16 + x^2}}{4} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} ln \left| \frac{\sqrt{16 + x^2}}{4} + \frac{x}{4} \right| + C \right]$$

$$= 16 \left[\frac{1}{32} x\sqrt{16 + x^2} + \frac{1}{2} ln \left| \frac{x+\sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + C \right]$$

$$= \frac{16}{32} x\sqrt{16 + x^2} + \frac{16}{2} ln \left| \frac{x+\sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + C$$

Jadi solusi untuk integral ini adalah,

$$\int \sqrt{16 + x^2} dx = \frac{16}{32} x\sqrt{16 + x^2} + \frac{16}{2} ln \left| \frac{x+\sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + C$$

2. $\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx$

Bentuk substitusi untuk x adalah $x = sec\ \theta$ dengan nilai $a = 1$. Jadi diketahui,

$$x = sec\ \theta$$

bentuk turunan pertama dari x adalah,

$$dx = sec\ \theta\ tan\ \theta\ d\theta$$

kedua bentuk ini akan disubstitusikan pada

$$\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

sehingga menjadi,

$$= \int sec^3\theta\ \sqrt{sec^2\theta - 1}\, (sec\ \theta\ tan\ \theta\ d\theta)$$

diketahui $sec^2\,\theta = 1 + tan^2\,\theta$, sehingga menjadi

$$= \int sec^3\theta\,\sqrt{tan^2\theta}\,(sec\,\theta\,tan\,\theta\,d\theta)$$

$$= \int sec^4\theta\,tan^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{tan^3\theta}{3} + \frac{tan^5\theta}{5} + C$$

dari bentuk ini, kita kembalikan menjadi bentuk variabel x dengan mengganti $tan\,\theta = \sqrt{x^2 - 1}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5}{5} + C$$

bila disederhanakan bentuk pangkatnya menjadi 3 dan penyebutnya menjadi 15, maka solusinya menjadi,

$$= \frac{1}{15}(3x^2 - 2)\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 + C$$

Jadi solusi untuk integral ini adalah,

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{15}(3x^2 - 2)\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3 + C$$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Bentuk substitusi untuk x adalah $x = sin\,\theta$ dengan nilai $a = 1$. Jadi diketahui,

$$x = sin\,\theta$$

bentuk turunan pertama dari x adalah,

$$dx = cos\,\theta\,d\theta$$

kedua bentuk ini akan disubstitusikan pada

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

sehingga menjadi,

$$= \int \frac{sin\,\theta}{\sqrt{1-sin^2\theta}}(cos\,\theta\,d\theta)$$

diketahui $sin^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$, sehingga menjadi,

$$= \int \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta} d\theta$$

$$= \int \sin\theta \, d\theta \; = \; -\cos\theta + C$$

dari bentuk ini, kita kembalikan menjadi bentuk variabel x dengan mengganti $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + C$

Jadi solusi untuk integral ini adalah,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

BAB X
INTEGRAL TERTENTU

A. Pengertian dan Kegunaan Integral

1. Pengertian Integral

Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu. Berdasarkan pengertian tersebut ada dua hal yang dilakukan dalam integral sehingga dikategorikan menjadi 2 jenis integral. Pertama, integral sebagai invers/kebalikan dari turunan disebut sebagai Integral Tak Tentu. Kedua, integral sebagai limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu disebut integral tentu.

Integral adalah sebuah konsep penjumlahan secara berkesinambungan dalam **matematika**. Integral dan inversnya, **diferensiasi**, adalah operasi utama dalam **kalkulus**. Integral dikembangkan menyusul dikembangkannya masalah dalam diferensiasi, yaitu matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi. Lambang integral adalah $\int$.

Bila dilihat berdasarkan data kemudian diberikan suatu **fungsi** *f* dari **variabel real** *x* dengan **interval** [*a*, *b*] dari sebuah garis lurus, integral tertentu

$$\int_a^b f(x)dx$$

didefinisikan sebagai **area** yang dibatasi oleh **kurva** *f*, sumbu-*x*, sumbu-*y*, serta garis vertikal $x = a$ dan $x = b$ dengan area yang berada di atas sumbu-*x* bernilai positif dan area di bawah sumbu-*x* bernilai negatif.

Kata *integral* juga dapat digunakan untuk merujuk pada **antiturunan**, sebuah fungsi *F* yang turunannya adalah fungsi *f*. Pada kasus ini, ia disebut sebagai *integral tak tentu* dan notasinya ditulis sebagai berikut.

$$\mathrm{F} = \int f(x)\, dx$$

Prinsip-prinsip dan teknik integrasi dikembangkan terpisah oleh **Isaac Newton** dan **Gottfried Leibniz** pada akhir abad ke-17.

Melalui **teorema fundamental kalkulus** yang mereka kembangkan masing-masing, integral terhubung dengan diferensial: jika *f* adalah fungsi kontinu yang terdefinisi pada sebuah **interval yang dimana keadaan inerval tersebut tertutup** [*a*, *b*], jika antiturunan *F* dari *f* diketahui, integral tertentu dari *f* pada interval tersebut dapat didefinisikan sebagai:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$$

Integral dan diferensial menjadi peranan penting dalam kalkulus dengan berbagai macam aplikasi pada sains dan **teknik**.

2. Kegunaan Integral

Manfaat integral dalam kehidupan sehari-hari diantaranya adalah:

a. Bidang Matematika
   1) Menentukan luas suatu bidang,
   2) Menentukan voluem benda putar,
   3) Menentukan panjang busur

b. Bidang Ekonomi
   1) Mencari fungsi asal dari fungsi marginalnya (fungsi turunannya)
   2) Mencari fungsi biaya total
   3) Mencari fungsi penerimaan total dari fungsi penerimaan marginal
   4) Mencari fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal,
   5) Mencari fungsi tabungan dari fungsi tabungan marginal
   6) Mencari fungsi kapital dari fungsi investasi

c. Bidang Teknologi
   1) Penggunaan laju tetesan minyak dari tangki untuk menentukan jumlah kebocoran selama selang waktu tertentu
   2) Penggunaan kecepatan pesawat ulang alik Endeavour untuk menentukan ketinggian maksimum yang dicapai pada waktu tertentu
   3) Memecahkan persoaalan yang berkaitan dengan volume, paanjang kurva, perkiraan populasi, keluaran kardiak, gaya pada bendungan, usaha, surplus konsumen

d. Bidang Fisika
    1) Untuk analisis rangkaian listrik arus AC
    2) Untuk analisis medan magnet pada kumparan
    3) Untuk analisis gaya-gaya pada struktur pelengkung
e. Bidang Teknik

    Penggunaan Integral dapat membantu programmer dalam pembuatan aplikasi dari mesin-mesin yang handal. Misal: Para enginer dalam membuat desain mesin pesawat terbang.
f. Bidang Medis

    Dosimetri adalah ri radioterapi, intinya dosimetri tersebut memakai high energy ionizing radiation, salah satu contohnya yaitu sinar-X. Disini ilmu matematika khususnya integral sangat berpengaruh dalam proses pengerjaanya, dimana penembakan laser nantinya membutuhkan koordinat yang tepat. Pada integral dibahas volume benda putar dengan metode cakram, cincin, dll (dengan begini dapat mengukur volume tumor, jikalau pasca penembakan laser volume menurun, maka operasi berhasil).

3. Aplikasi Integral

Integral dapat diaplikasikan ke dalam banyak hal. Dari yang sederhana, hingga aplikasi perhitungan yang sangat kompleks. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan volume benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya.

Berikut merupakan aplikasi-aplikasi integral yang telah dikelompokkan dalam beberapa kelompok perhitungan. Penjelasan lebih lanjut dapat dilihat pada keterangan yang diberikan.

a. Pada bidang Teknik

    Pada bidang Tekhnik penggunaan turunan dapat membantu programer dalam pembuatan aplikasi dari mesin – mesin yang handal. Contohnya : Para Enginer dalam membuat / mendisain mesin – mesin pesawat terbang.
b. Pada bidang Matematika

Turunan digunakan untuk pencarian dalam limit, yang bentuk soal limitnya harus di faktorkan atau di kalikan terlebih dahulu dengan akar sekawan. Selain itu , Aplikasi turunan juga digunakan untuk menentukan persamaan garis singgung.

Contoh penggunaan Turunan untuk menentukan Garis singgung:

Tentukan persamaan garis singgung dari y = = x^3 - 2x^2 - 5 pada titik (3,2).

Jawab :

y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5

y = f(x)=3x^2 - 4x, f '(3) = 3$(3)^2$ - 4(3) = 15 ; m = 15.

Rumus pers. Garis singgung :

y-y_0 = m (x-x_0)

maka garis singgung fungsi diatas adalah :

y – 2 = 15 (x – 3) atau y = 15x – 43

c. Pada bidang Ekonomi

Penerapan Turunan parsial dalam bidang ekonomi antara lain digunakan untuk menghitung fungsi produksi, konsep elastisitas, angka pengganda, optimisasi tanpa kendala, dan optimisasi dengan kendala (fungsi lagrange). Pada bidang ekonomi fungsi turunan dipakai untuk mencari biaya marjinal, yaitu dengan cara menurunkannya dari persamaan biaya total. Bisa ditulis biaya marjinal = biaya total'. Para matematikawan mengenal biaya marjinal sebagai dc/dx, turunan C terhadap x. dengan demikian dapat didefinisikan harga marjinal sebagai dp/dx, pendapatan marjinal sebagai dR/dX, dan keuntungan marjinal sebagai dp/dx.

Berikut contoh soal :

Sebuah perusahaan mempunyai biaya 3200 + 3,25x – 0,0003x^2 dengan jumlah persatuan x=1000. tentukan biaya rata-rata dan biaya marjinal?

Penyelasaian

biaya rata-rata = C(x)/x

= 3200+3,25x-0,0003x^2 / x

$= 3200+3,25 (1000)-0,0003(1000)^2 / 1000$
$= 6150 / 1000 = 6,15$

Maka biaya rata-rata persatuan yaitu 6,15 x 1000 = Rp.6150
biaya marjinal = dc/dx
$= 3,25-0,0006x$
$= 3,25-0,0006 (1000)$
$= 2,65$

maka biaya marjinalnya, 2,65 x 1000 = Rp.2650 Pada x=1000

Dari hasil di atas, dapat dikatakan bahwa dibutuhkan Rp.6150 untuk memproduksi 1000 barang pertama dan membutuhkan Rp. 2,65 untuk membuat 1 barang setelah barang yang ke 1000, hanya dibutuhkan Rp. 2650 untuk membuat 1000 barang yang sama.

d. Pada bidang Fisika

Besaran Turunan adalah besaran yang terbentuk dari satu atau lebih besaran pokok yang ada. Besaran adalah segala sesuatu yang memiliki nilai dan dapat dinyatakan dengan angka. Misalnya adalah luas yang merupakan hasil turunan satuan panjang dengan satuan meter persegi atau m pangkat 2 (m^2). Luas didapat dari mengalikan panjang dengan panjang.

Berikut ini adalah berbagai contoh besaran turunan sesuai dengan sistem internasional/SI yang diturunkan dari sistem MKS (meter - kilogram - sekon/second) :

1) Besaran turunan energi satuannya joule dengan lambang J
2) Besaran turunan gaya satuannya newton dengan lambang N
3) Besaran turunan daya satuannya watt dengan lambang W
4) Besaran turunan tekanan satuannya pascal dengan lambang Pa
5) Besaran turunan frekuensi satuannya Hertz dengan lambang Hz
6) Besaran turunan muatan listrik satuannya coulomb dengan lambang C

7) Besaran turunan beda potensial satuannya volt dengan lambang V
8) Besaran turunan hambatan listrik satuannya ohm dengan lambang ohm
9) Besaran turunan kapasitas kapasitor satuannya farad dengan lambang F
10) Besaran turunan fluks magnet satuannya tesla dengan lambang T
11) Besaran turunan induktansi satuannya henry dengan lambang H
12) Besaran turunan fluks cahaya satuannya lumen dengan lambang ln
13) Besaran turunan kuat penerangan satuannya lux dengan lambang lx

e. Pada bidang Ekonomi

Operasi hitung integral dapat diterapkan dalam persoalan ekonomi, misalnya dalam integral tak tentu digunakan menghitung fungsi total, dan dalam integral tertentu digunakan untuk menghitung surplus konsumen dan surplus produsen.

Jika diketahui fungsi demand dan supply suatu barang, operasi hitung integral dapat dipakai untuk menghitung surplus konsumen dan surplus produsen pada saat market equilibriumatau pada tingkat harga tertentu.

1) Surplus Konsumen

Konsumen yang mampu atau bersedia membeli barang lebih tinggi (mahal) dari harga equilibrium P0 akan memperoleh kelebihan (surplus) untuk tiap unit barang yang dibeli dengan harga P_0. Pada saat equilibrium, jumlah total pengeluaran (total expenditure) konsumen = $P_0 . X_0$. yang dalam gambar ini adalah luas empat persegi panjang 0_{abc}, sedangkan konsumen yang tadinya bersedia membeli barang ini lebih tinggi dari harga P_0. akan menyediakan uang yang banyaknya = luas daerah yang dibatasi kurva demand yang sumbu tegak P, sumbu mendatar X, dan garis ordinat x = x_0. (yakni = luas daerah $O_{ABF}.$). Karena itu, besarnya surplus konsumen yakni selisih antara jumlah uang yang disediakan dikurangi dengan jumlah pengeluaran nyata konsumen sehingga surplus konsumen dapat dinyatakan sebagai berikut:

SK = Luas $O_{ABF}.$ – Luas $O_{ABC}.$

2) Surplus Produsen

Surplus produsen adalah selisih antara hasil penjualan barang dengan jumlah penerimaan yang direncanakan produsen dalam penjualan sejumlah barang. Pada saat harga terjadi price equilibrium P_0, maka penjual barang yang bersedia menjual barang ini dibawah harga $P_0.$ akan memperoleh kelebihan harga jual untuk tiap unit barang yang terjual yakni selisih antara po dengan harga kurang dari $P_0.$

Sedangkan, pada saat equilibrium, penjual barang ini akan menerima hasil penjualan barang sejumlah $P_0 . X_0$ yang dalam gambar adalah luas empat persegi panjang 0ABC, sedangkan sebenarnya penjual barang ini bersedia menerima sejumlah uang yang banyaknya = luas daerah yang dibatasi kurva supply dengan sumbu P, sumbu X dan garis ordinat x = $X_0.$ (yakni luas daerah $O_{ABE}.$), maka penjual barang ini akan memperoleh surplus produsen (penjual) sebanyak berikut ini:

SP = Luas $O_{ABC}.$ – Luas daerah O_{ABE}

f. Pada bidang Teknologi

1) Penggunaan laju tetesan minyak dari tangki untuk menentukan jumlah kebocoran selama selang waktu tertentu.
2) Penggunaan kecepatan pesawat ulang alik Endeavour untuk menentukan ketinggian maksimum yang dicapai pada waktu tertentu.
3) Memecahkan persoaalan yang berkaitan dengan volume, paanjang kurva, perkiraan populasi, keluaran kardiak, gaya pada bendungan, usaha, surplus konsumen.

g. Pada bidang Kedokteran

Dosimetri adalah suatu ilmu cabang dari, intinya dosimetri itu pakai *high energy inonizing radiation*, salah satunya sinar-X berarti kerjaannya jadi tukang rontgen, lebih tepatnya analisis hasil rontgen, berarti pembahasannyatentang penyakit dalam.

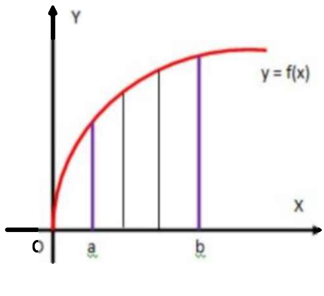
Kalkulus berperan pada saat penentuan lokasi koordinat penembakan laser. Pada kalkulus integral di bahas volume benda putar dengan metode cakram, cincin dll (dengan ini kita dapat mengukur volume tumor, kalau pasca penembakan laser volume menurun, maka operasi berhasil). Aplikasi kalkulus yang kedua adalah mengkur fungsi pergerakan kulit tumor setiap waktu, tujuannya, agar setelah tumor hilang, laser tidak ditembakkan lagi (takut merusak organ). Sekedar catatan, ada juga sember lain yang menganggap tumor adalah sistem fluida, jadi hukum-hukum fluida juga penting untuk ilmu dosimetri.

B. Luas Daerah dan Volume Benda Putar

1. Luas Daerah

Luas Daerah yang Dibatasi Kurva

Untuk menghitung luas daerah yang dibatasi suatu kurva dengan sumbu x dapat kita gunakan konsep integral tentu.



Gambar 1

Luas daerah
Di atas Sumbu x

$$\int_a^b f(x)dx$$

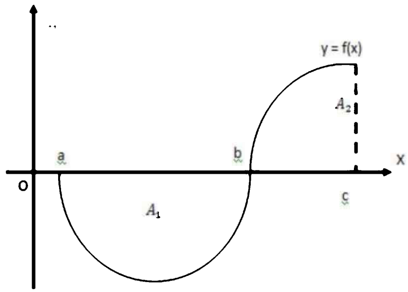
Di bawah Sumbu x

$$-\int_a^b f(x)dx$$

Atau

$$\int_b^a f(x)dx$$

Misalkan kita diberikan gambar berikut,



Gambar 2

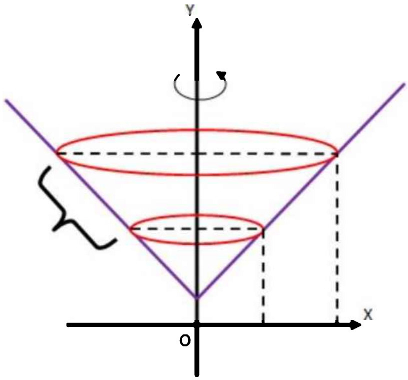
maka luas A_1dan A_1 adalah:

$$L_{A_1 \text{dan } A_1} = \int_b^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

2. Volume Benda Putar

$$\mathrm{V} = \pi. \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi. \int_a^b y^2 dx$$

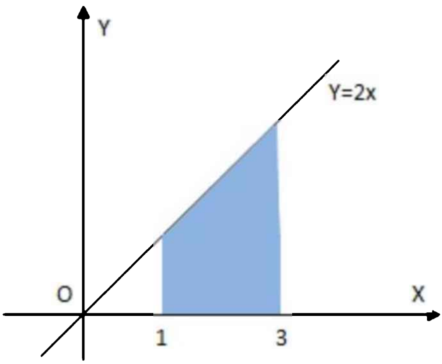
Perhatikanlah ilustrasi jika suatu bidang datar dirotasikan terhadap sumbu Y



Gambar 3

Contoh Soal :

1) Tentukanlah luas daerah bidang tersebut dan tentukan juga volumenya seandainya bidang yang diarsir tersebut diputar terhadap sumbu x.



Gambar 4

$L_{Arsiran} = \int_1^3 2x\, dx$

$= [x^2]_1^3$

$= (3)^2 - (1)^2$

$= 9 - 1$

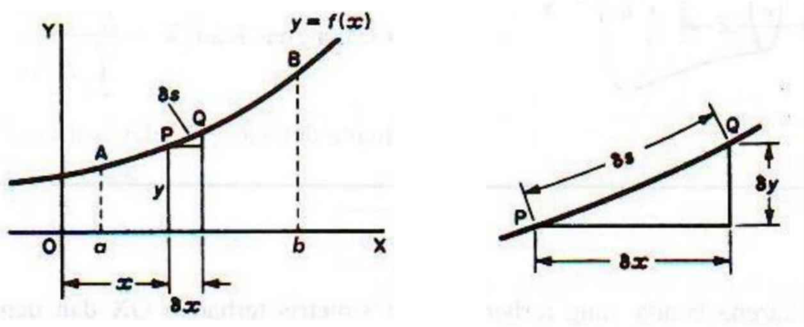
$= 8$ satuan luas dan

$$V_{Benda\ Putar} = \pi \int_1^3 (y)^2\, dx = \pi \int_1^3 (2x)^2\, dx$$
$$= \pi \int_1^3 4x^2\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{4x^3}{3}\right]_1^3$$
$$= \pi. \left(\frac{4.(3)^3}{3}\right) - \pi \left(\frac{4.(1)^3}{3}\right)$$
$$= 36\,\pi - \frac{4}{3}\,\pi$$
$$= 34\frac{2}{3}\,\pi \text{ satuan volume}$$
dst

C. Panjang Kurva dan Luas Permukaan Benda Putar

1. Panjang Kurva

Akan dicari panjang busur suatu kurva y=f(x) diantara x=a dan x=b



Gambar 5 dan 6

Misalkan P adalah titik (x,y) dan Q adalah suatu titik pada kurva di dekat P. misalkan δx= panjang busur kecil PQ.
Maka :

$$(\delta s)^2 \approx (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

$$\frac{(\delta s)^2}{(\delta x)^2} \approx 1 + \frac{(\delta y)^2}{(\delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 \approx 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta y}\right)^2$$

$$\frac{(\delta s)}{(\delta x)} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta y}\right)^2}$$

Jika $\delta x \to 0$ $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$ $s = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$. dx

Contoh :

Carilah panjang dari kurva y = 10 cosh $\frac{x}{10}$ diantara x = -1 dan x = 2

Jawaban :

$y = 10 \cosh \frac{x}{10}$ $s = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$. dx

$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{10}$ $1 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1 + sinh^2 \frac{x}{10} = cosh^2 \frac{x}{10}$

$s = \int_{-1}^{2} \sqrt{cosh^2 \frac{x}{10}} . dx = \int_{-1}^{2} cosh \frac{x}{10} . dx = \left[10 \sinh \frac{x}{10}\right]_{-1}^{2}$

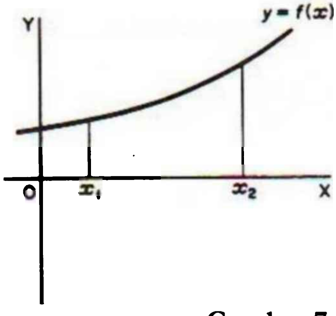
$s = 10\ (\sinh 0{,}2 - \sinh(-0{,}1))$ $\sinh -x = -\sinh x$

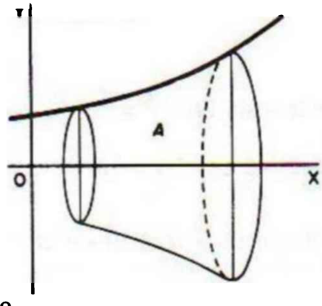
$s = 10\ (\sinh 0{,}2 + \sinh 0{,}1) = 10(0{,}2013 + 0{,}1002)$

$s = 10\ 0{,}3015 = 3{,}015\ satuan$

2. Luas Permukaan Benda Putar

Jika busur suatu kurva diputar mengelilingi sebuah sumbu, maka putaran ini akan membentuk suatu permukaan. Carilah luas permukaan benda-putar yang terjadi jika busur suatu kurva y=f(x) diantara x=x_1 dan x=x_2 diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu-x.





Gambar 7 dan 8

DAFTAR PUSTAKA

Arhami, M. (2018). *Kalkulus Untuk Politeknik*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Bagio, T. H. (2010). *Kalkulus Dasar.*

Baisuni, H.M.Hasyim. (2005). *Kalkulus*. Jakarta. Universitas Indonesia-Press.

Djohan, Warsoma., Budhi W,S. (2007). *Diktat Kalkulus 1*. Retrieved from http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/mycourse/files/2009/08/kalkulus1.pdf

Cipta, H. (2020). Kalkulus integral. *ResearchGate*, *March.*

Dale Varberg, Edwin J. Purcell, and S. E. R. (2008). *Kalkulus*. Erlanga.

Dedy, E., dkk. (2020). *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta Timur: PT Bumi Aksara.

Edwin J.Purcell and Dale Varberg. (1987). Kalkulus dan Geometri Analitis. In *Jilid 1* (Kelima, p. 242). Erlanga.

Fernandez, O. (2019). *Calculus Simplified.* Princeton University Press.

Gazali, Wikaria, dkk. (2007). *Kalkulus*. Jakarta. Graha Ilmu.

Glover, D. (2006). *Seri ensiklopedia anak A-Z matematika*. PT Grafindo Media Pratama.

Greg, B. (2017). *Pengenalan Awal Bilangan Cacah di Kelas Rendah Sekolah Dasar.* https://www.tipsbelajarmatematika.com/2017/09/pengenalan-awal-bilangan-cacah-di-kelas.html

Guichard, D. R. (2009). *Calculus.* In *Whiteman.edu.* https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201

Gunawan, H. (2015). *Materi Kurikuler SMP "Bilangan."* Retrieved from http://repository.ut.ac.id/4698/2/PEMA4130-M1.pdf

Hamid, A. (2019). *Kalkulus Dalam Fisika.* Banda Aceh: Syiah Kuala University Press,

Hasanah, Uswatun. (2019). Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Turunan Fungsi Aljabar. Jurnal InTent Vol 2 No. 1, Hal. 76 – 84.

https://id.wikipedia.org/wiki/Integral

http://sebrian.lecture.ub.ac.id/files/2017/05/10-Aplikasi-Integral-1.pdf
Insani, N. (2007). Kalkulus Diferensial. In *Acit* (Vol. 67, pp. 14–21). Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
Ismadi, J. (2008). *Ensiklopedia matematika.* Jakarta: Nobel Edumedia.
Karim, N. (2013, Juli 13). *https://itachiphysics.files.wordpress.com/2013/04/fungsi-transenden.pdf.* Dipetik april 13, 2021, dari https://itachiphysics.wordpress.com/: https://itachiphysics.files.wordpress.com/2013/04/fungsi-transenden.pdf.
KBBI. (2020). *Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) Kamus versi online/daring*. Kemendikbud.
Keyser, C. J. (1907). Algebra - College. *Science*, *26*(666), 438–439.
Kuntarti, Sulistiyono dan Sri Kurnianingsih. 2007. *Matematika SMA dan MA untuk Kelas XII Semester 1 Program IPA Standar Isi 2006*. Jakarta: esis.
LaTorre, D. R., Kenelly, J. W., Reed, I. B., Carpenter, L. R., & Harris, C. R. (2007). *Calculus Concepts: An Applied Approach to the Mathematics of Change* (4th ed.). Cengage Learning.
Laut, S. T. T. A. (2017). *Operasi Bilangan* (No. 02). Retrieved from http://sttal.ac.id/wp-content/uploads/2017/06/2.-Operasi-Bilangan.pdf
Lumbantoruan, J. H. (2019). Integral Tak-tentu. In *Jilid 1* (1st ed., p. 109).
Muhammad Faizal Amir, B. H. P. (2016). *Buku Ajar Matematika Dasar.* Umsida Press.
Opan. (2013). *Integral Fungsi Pecahan (Rasional).* https://maths.id/integral-fungsi-rasional-pecahan#:~:text=Fungsi%20rasional%20adalah%20fungsi%20yang,masing%2Dmasing%20merupakan%20fungsi%20polinomial.&text=Gunakan%20teknik%20pengintegralan%20substitusi%20untuk%20menyelesaikan%20integral%20di%20atas, diakses 29 Maret 2021.
Petrovic, J. S. (2020). *Advanced calculus: theory and practice.* CRC Press.
Pinem M. D. (2015). Kalkulus Untuk Perguruan Tinggi.Bandung: Rekayasa

Sains.

Pujiati. (2010). *Pembelajaran perpangkatan dan penarikan akar bilangan di SD.* Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Calculus (9th Edition).* Pearson.

Purcell, Edwin J., & Varberg. D. (1987). *Edisi 5 Kalkulus dan Geometri Jilid I.* Bandung. Erlangga.

Purnomo, Dwi. (2010). *Kalkulus Diferensial.* Retrieved From http://dwipurnomoikipbu.files.wordpress.com/2010/12/file-00.doc.

Rademacher, H. (1954). *Lectures on Analytic Number Theory.* Bombay: Tata Institute of Fundamental Research.

Rejeki, S. (2017). KONTRIBUSI KEMAMPUAN KALKULUS I DAN KALKULUS II TERHADAP HASIL BELAJAR MATA KULIAH ANALISIS VEKTOR. *Jurnal Pendidikan Matematika.* https://doi.org/10.18592/jpm.v3i1.1178

Reys. R.E. (2009). *Helping childrens learning mathematics-9th edition.* JohnWiley&Sons: Hoboken.

Rohartati, S. (2018). Meningkatkan pemahaman konsep dalam materi bilangan ganjil genap dengan menggunakan model paikem di kelas II sekolah dasar. *Primaria Educationem Journal, 1*(2), 131–142.

S.T. Negoro & B. Harahap. (2005). *Ensiklopedia matematika.* Bogor: Ghalia Indonesia

Sagala, Viktor. (2017). Struktur Lapisan Pemahaman Konsep Turunan Fungsi Mahasiswa Calon Guru Matematika. Jurnal Didaktik Matematika Vol. 4 No. 2, Hal. 125-135.

Sari, Puspita. (2018). Analisis Strategi Mahasiswa dalam Menentukan Turunan Fungsi dengan Metode Diferensiasi Logaritmik. Jurnal Riset dan Inovasi Pembelajaran Matematika. Vol. 2 No. 1, Hal 1 – 14.

Sriyanto.(2009).*Cepat Tuntas Kuasai Matematika.* Yogyakarta: Penerbit Indonesia Cerdas.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2020). *Calculus: early transcendentals.* Cengage Learning.

Stroud, K.A. dan Booth, D.J. (2001). Matematika Teknik Edisi Kelima Jilid 1. Alih bahsa oleh Zulkifli Harahap. Jakarta : Erlangga.

Sugiono M.Kes, I. (2018). *Pertidaksamaan*. Retrieved from http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/pendidikan/ir-sugiyono-mkes/11-pertidaksamaan.pdf

Suhartono. (2015). *Memahami Kalkulus Dasar Menggunakan Wolfram Mathematica 9*. UIN Maulana Malik Ibrahim.

Susila, N. (2001). *Kalkulus jilid 1 Edisi Ketujuh*. Interaksara.

Tim Dosen Unhas. (2005). *Matematika Dasar I*. Makassar: Fakultas MIPA UNHAS.

V.Zandy, B., & J.White, J. (n.d.). *Seri MAtematika Keterampilan Kalkulus*. Pakar Raya.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M.(2013) *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (8th ed.)* Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Varberg, D., J, E., & Purcell. (2004). *Kalkulus* (1st ed.). Erlangga.

Wardiman. (1987). *Hitung Integral*. PT. Hanindita Graha Widya.

Widodo. (2014). *Keterampilan berhitung matematika jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Wu, H. (2010). *Introduction to School Algebra*. In *Science* (p. 210). Berkeley: Department of Mathematics University of California.

Yahya, Y. (2010). *Matematika Dasar Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia.

Zwillinger, D. (Ed.). (2018). *CRC standard mathematical tables and formulas*. CRC press.

BIOGRAFI PENULIS

Irmayanti, S.Pd., M.Pd., lahir di Sinjai, 10 Mei 1991. Penulis menyelesaiakan studi S-1 Pendidikan Matematika di UIN Alauddin Makassar dan S-2 PendidikanMatematika Universitas Negeri Makassar. Penulis adalah dosen tetap di Program Studi Tadris Matematika Institut Agama Islam Muhammadiyah sinjai sejak 2007 sampai sekarang. Saat ini penulis menjabat sebagai Sekretaria Lembaga Penjaminan Mutu Institut Agama Islam Muhammadiyah Sinjai.

Kiki Henra. Lahir di Kendari pada tanggal 29 April 1990 dari pasangan Ir. Surahman Saad dan Haliah, S.Pd. Menempuh jenjang Pendidikan Dasar di SDN 213 Lapongkoda (1996-2003), Sekolah Menengah Pertama di SMP 3 Sengkang (2003-2005), kemudian jenjang Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 7 Wajo (2005-2008). Melanjutkan jenjang Pendidikan tinggi S-1 pada Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Muhammadiyah Makassar (2008-2012). Pada jenjang S-2 ditempuh pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar (2016-2018). Saat ini sedang menempuh Pendidikan jenjang S-3 pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar. Saat ini penulis merupakan Dosen tetap pada program studi Pendidikan Matematika di Universitas Muhammadiyah Bone. Selain mengajar sebagai dosen penulis juga mendirikan Lembaga Non-formal *Mathematics Education* Center yang bergerak dalam bidang konsultan matematika dan statistik. Email aktif penulis henrakiki@gmail.com.

Andi Ulmi Asnita, lahir di Tanete pada tanggal 17 Agustus 1989. Anak pertama dari 3 (tiga) bersaudara dan merupakan buah cinta dari pasangan H.A.Nursalam, S.Pd. dan Almh.Hj.ST.Hasniati., S.Pd. Menempuh jenjang Pendidikan Dasar di SDN No.62 Sinjai Tengah (1995-2001), Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Bulukumpa (2001-2004), kemudian jenjang Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Sinjai Timur (2004-2007). Melanjutkan jenjang pendidikan tinggi S-1 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar (2007-2011). Jenjang S-2 ditempuh pada Prodi Pendidikan Matematika Universitas Negeri Makassar (2012-2014). Saat ini penulis merupakan Dosen di Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar dan dipercayakan mengampuh matakuliah Kalkulus I, Kalkulus Lanjutan. E-mail aktif penulis ulmi.asnita@uin-alauddin.ac.id.

Nama lengkap penulis adalah **Munaji** anak kedelapan dari 9 bersaudara dari pasangan Bapak Hasim dan Ibu Sutri. Lahir di Kota Cirebon pada tanggal 4 Juli 1983. Penulis merupakan alumni S1 Tadris Matematika IAIN Syekh Nurjati Cirebon dan S2 Pendidikan Dasar Konsentrasi Matematika Universitas Pendidikan Indonesia. Sejak tahun 2006 penulis sudah aktif menjadi pengajar matematika di sekolah mulai dari tingkat SD sampai SMA, dan memperoleh sertifikat pendidik sebagai guru profesional pada bidang matematika pada tahun 2013. Sejak tahun 2018 hingga saat ini penulis merupakan dosen tetap di Universitas 17 Agustus 1945 Cirebon.

Dinar Riaddin. Lahir di Ambon pada tanggal 9 September 1986 dari pasangan seorang ayah La Inu dan seorang ibu Wa Untu. Menempuh jenjang pendidikan dasar di SDN Buku Kabupaten Wakatobi (Tahun 1994-2000) dan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Wangi-Wangi (Tahun 2000-2003). Adapun jenjang SMA ditempuh di SMAN 1 Wangi-Wangi Kabupaten Wakatobi (Tahun 2003-2006). Melanjutkan jenjang studi S1 pada Program Studi Pendidikan matematika IAIN Ambon (Tahun 2006-2011). Adapun pendidikan S2 ditempuh pada program studi pendidikan matematika Pascasarjana Universitas Negeri Makassar, dan lulus S2 dengan judul tesis" *Pengembangan multimedia interaktif berbasis teori Van Hiele pada materi bangun ruang sisi datar siswa kelas VIII MTsN Model Makassar*." Hingga kini penulis adalah dosen tetap pada prodi pendidikan matematika IAIN Ambon. Beberapa Mata kuliah yang diampu diantaranya adalah Kalkulus lanjut, Pembelajaran matematika Berbasis ICT, Pemrograman Komputer, Teori Bilangan dan lain-lain. Email aktif adalah dinar.riaddin@iainambon.ac.id.

Fitriani. Lahir di Watampone pada tanggal 04 April 1992 dari pasangan seorang ayah Mursalin dan Hawirah. Menempuh jenjang pendidikan dasar di SD Inpres 10/73 Pancaitana Kabupaten Bone (Tahun 1998-2004) dan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Salomekko kabupaten Bone (Tahun 2004-2007). Adapun jenjang SMA ditempuh di SMAN 1 Sinjai Utara Kabupaten Sinjai (Tahun 2007-2010). Melanjutkan jenjang studi S1 pada Program Studi Pendidikan matematikau UIN Alauddin Makassar (Tahun 2010-2014). Adapun pendidikan S2 ditempuh pada program studi pendidikan matematika Pascasarjana Universitas Negeri Yogyakarta (Tahun 2015-2017). Saat ini penulis adalah dosen tetap pada prodi Tadris Matematika Institut Agama Islam Muhammadiyah Sinjai (IAIM Sinjai). Beberapa Mata kuliah yang diampu diantaranya adalah Kalkulus, Kalkulus lanjut, Aljabar Linear Elementer, Geometri, Strategi Pembelajaran Matematika, dan lain-lain. Email aktif adalah fitrianifitri240@gmail.com.

Junaedi, S.Pd., M.Pd., lahir di Pamboang pada tanggal 14 Agustus 1987. Anak ke 6 (enam) dari 8 (delapan) bersaudara dan merupakan buah dari cinta pasangan H. Abdul Latif dan Hj. Nurbaeti. Penulis memulai pendidikan sekolah dasar di SDN 3 Tinambung (1994-2000). Pada tahun yang sama penulis melanjutkan di SMP Negeri 1 Pamboang (2000-2003). Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di SMU Negeri 3 Majene (2003-2006). Penulis diterima di Jurusan Pendidikan Matematika Program Sarjana (S1) Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam STKIP Cokroaminoto Pinrang (2006-2010). Penulis melanjutkan pendidikan di Program Studi Pendidikan Matematika, Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar (2012-2014). Beberapa pengalaman mengajar yaitu Dosen di Amik Tomakaka Majene (2009-2020), Dosen di Universitas Sulawesi Barat (2011-2013), Tutor Pendidikan Matematika dan Statistika Pendidikan di UT UPBJJ Majene (2014-sekarang), Dosen di STIKes Bina Bangsa Majene (2015-sekarang), Dosen Magang Universitas Gadjah Mada (2018), dan Dosen di Institut Agama Islam Darud Da'wah Wal-Irsyad Polewali Mandar. Beberapa mata kuliah yang diampu diantaranya adalah Matematika Dasar, Statistika Pendidikan, Analisis dan Pengembangan Kurikulum, dan lain-lain. Email aktif adalah junaedi.latif@gmail.com dan junaedi@ddipolman.ac.id.

Bernadus Bin Frans Resi, M. Pd. merupakan lulusan S-1 Pendidikan Matematika & S-2 Magister Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharma Yogyakarta. Sejak tahun 2018 hingga sekarang bekerja sebagai dosen pada Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan (FKIP), Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka. Di samping menjadi pengajar penulis juga aktif menulis artikel pendidikan dan melakukan penelitian di bidang pendidikan matematika serta pengabdian kepada masyarakat. Putera Adonara kelahiran Kinabalu (Malaysia) ini pernah menulis buku bersama dengan penulis lainnya. Adapun judul tulisan sebagai berikut: *Rotan Cinta Kasih, Haruskah?* (2017) dan *Nilai Nol Mengubahku* (2018) yang sudah diterbitkan oleh penerbit garudhawaca Yogyakarta, *Membiasakan Hal yang Luar Biasa di Tengah Pandemik Covid-19* (2020), dan *"mengasah" karaktrer generasi masa depan melalui pembelajaran matematika* (2021) yang sudah diterbitkan oleh penerbit Yedija Nusantara Yogyakarta. Buku pribadi yang pernah ditulis yaitu *Pengantar Microteaching Matematika: keterampilan dasar dalam pembelajaran matematika berbasis budaya lokal* (2021) diterbitkan oleh penerbit Pustaka Learning Center Malang.

Penulis lahir di Jakarta pada tahun 1980. Saat ini penulis adalah staf di Pusat Teknologi Bahan Bakar Nuklir BATAN sebagai Peneliti Ahli Madya. Penulis menyelesaikan studi S1 di prodi Fisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2003. Tahun 2008, penulis berkesempatan melanjutkan studi S2 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia yang diselesaikan tahun 2010 melalui program beasiswa internal BATAN. Melalui beasiswa Kemenristek Dikti tahun 2012, penulis melanjutkan studi S3 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia dan menyelesaikannya ditahun 2015.

Bidang kepakaran Penulis adalah teknik material. Dalam karir sebagai peneliti selain membangun kompetensi kepakaran bidang teknik material, sejak tahun 2015 bergabung dalam kegiatan forensik nuklir. Penulis berkesempatan mengikuti MEXT *The Nuclear Researchers Exchange Program* tahun 2020 di Universitas Tokyo dengan tema *Materials Development of Nuclear Fuel Cladding* selama tiga bulan. Selain meneliti, penulis juga aktif menjadi pengajar dibeberapa Lembaga Pendidikan.

Saat ini, penulis aktif mengajar di prodi Teknik Elektro Universitas Pamulang. Penulis juga aktif mengelola jurnal terakreditasi nasional sebagai *Chief in Editor* untuk Urania Jurnal Ilmiah Daur Bahan Bakar Nuklir Pusat Teknologi Bahan Bakar Nuklir BATAN dengan status akreditasi SINTA 2 dan *Journal Of Electrical Power, Instrumentation And Control* (EPIC) Prodi Teknik Elektro Universitas Pamulang, dengan status akreditasi SINTA 5, dan sebagai mitra bestari di beberapa jurnal baik nasional maupun internasional.

Taufiqulloh Dahlan. Lahir di Sumedang pada tanggal 15 Juni 1990 dari pasangan seorang ayah H.AS Dahlan, S.Pd.I. dan seorang ibu Hj.Popong Rohayati,S.Pd.I.. Menempuh jenjang pendidikan dasar di SDN Cirayun Kabupaten Sumedang (Tahun 1996-2002) dan sekolah menengah pertama di MTs Kirisik Kabupaten Sumedang (Tahun 2002-2005). Adapun jenjang SMA ditempuh di SMAN 1 Sumedang di Kabupaten Sumedang (Tahun 2005-2008). Melanjutkan jenjang studi S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika UIN Sunan Gunung Djati Bandung (Tahun 2008-2012). Adapun pendidikan S2 ditempuh pada program studi pendidikan matematika Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia, dan lulus S2 dengan judul tesis" Kemampuan Pemahaman, Matematis Komunikasi Matematis dan Kecemasan Matematis Siswa MTs dalam Brain Based Learning". Hingga kini penulis adalah dosen tetap di Universitas Pasundan. Beberapa Mata kuliah yang diampu diantaranya adalah Matematika Dasar, Metodologi Penelitian, Kalkulus I, Kalkulus II dan lain-lain. Email aktif adalah taufiqulloh@unpas.ac.id.

Kalkulus adalah sebuah cabang pelajaran yang mempelajari mengenai masalah-masalah perubahan. Inti dari konsep kalkulus dasar adalah perubahan bilangan-bilangan yang digunakan dalam perhitungan matematika.

Secara garis besar, kalkulus adalah sebuah materi yang amat penting dalam berbagai ilmu, termasuk matematika. Keunggulan dalam memecahkan masalah matematis yang sulit dipecahkan menjadi salah satu faktor mengapa materi ini dipelajari secara luas dan salah satu ilmu penting di matematika.

Kalkulus tidak hanya berlaku dalam dunia matematika dan pelajaran yang mengandalkan perhitungan angka. Kalkulus dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari dan menjadi dasar dari penciptaan alat-alat yang sangat canggih di era modern ini. Contoh alat yang masih kita pakai sehari-hari dan masih dipakai hingga detik ini ialah GPS. Selain itu Kalkulus juga dapat digunakan untuk menghitung luas dan juga menghitung keuntungan dalam suatu perusahaan. Kalkulus terbukti menjadi ilmu yang penting untuk dipelajari dan sangat berguna untuk dikuasai.

YPMZ
YAYASAN PENERBIT MUHAMMAD ZAINI

Dosen Kolaborasi Lintas Perguruan Tinggi

ISBN 978-623-97420-8-9
9 786239 742089